

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400076

研究課題名(和文) 対称空間内の部分多様体と平均曲率流の無限次元幾何及び複素化を利用した研究

研究課題名(英文) Research of submanifolds and mean curvature flows in symmetric spaces by using the infinite dimensional geometry and the complexification

研究代表者

小池 直之 (Koike, Naoyuki)

東京理科大学・理学部第一部数学科・教授

研究者番号：00281410

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：研究期間内に実施した主な研究及びその成果は次の通りです。第1に、無限次元アンチケーラー空間内のアンチケーラー等径部分多様体に対する等質性定理を形作用素のある種の対角化可能性の仮定の下で得、さらに、この結果を利用して非コンパクト型対称空間内のある種の複素等焦部分多様体の等質性定理の証明をほぼ完成させた。第2に、無限次元ヒルベルト空間内のあるヒルベルトリー群作用に関して不変な水平的凸超曲面を発生する正則化された平均曲率流の崩壊性定理を得た。第3に、階数1の非コンパクト型対称空間内のある種の鏡映部分多様体上の半径が一定でないチューブを発生する体積を保存する平均曲率流の長時間挙動に関する結果を得た。

研究成果の概要(英文)：Main results of this research are as follows. First we obtained the homogeneity theorem for anti-Kaehler isoparametric submanifolds in the infinite dimensional anti-Kaehler space under the assumption of a certain kind of diagonalizability of the shape operators and furthermore, completed almost the proof of the homogeneity theorem for certain kind of complex equifocal submanifolds in symmetric spaces of non-compact type by using the result. Secondly we obtained the collapsing theorem for the regularized mean curvature flow starting from horizontally convex invariant hypersurfaces in a Hilbert space. Thirdly we obtained a result about the volume-preserving mean curvature flow starting from tubes of nonconstant radius over certain reflective submanifold in rank one symmetric spaces of non-compact type.

研究分野：数物系科学

キーワード：部分多様体幾何 無限次元幾何 平均曲率流 リー群作用 対称空間 部分多様体の複素化

### 1. 研究開始当初の背景

研究開始当初の背景は次の通りである。

(1) 1999年、Ernst Heintze と Xiabo Liu によって、無限次元ヒルベルト空間内の余次元2以上の既約な等径部分多様体に対する等質性定理が示され、2002年、U. Christ が Heintze-Liu の結果を用いて非コンパクト型対称空間内の余次元2以上の既約な等焦部分多様体に対する等質性定理を示した。しかし、Christ の証明にギャップがあり、2013年の C. Gorodski と E. Heintze によって Heintze-Liu の結果が改善されたことにより Christ の証明におけるギャップが埋められた。一方、研究代表者は、2004年以降、非コンパクト型対称空間内の複素等焦部分多様体に対する等質性定理を得るために、無限次元アンチケーラー空間内のアンチケーラー等径部分多様体の等質性の研究を創始し、研究開始当初までに等質スライス定理をはじめいくつかの結果を導出していた。

(2) 1995年、C. L. Terng と G. Thorbergsson は、一般の対称空間内の部分多様体の本格的な研究を創始した。閉区間 $[0,1]$ 上の自明な  $G$  バンドルの接続の空間  $V$  (これは可分なヒルベルト空間) からコンパクト型対称空間  $G/K$  への parallel transport map とよばれるリーマン沈めこみが定義される。(U. Christ は parallel transport map を通じて Heintze-Liu の結果を利用した。)  $G/K$  内の部分多様体の研究は  $V$  内の部分多様体の研究に還元することができる。2011年、研究代表者は、 $G/K$  内の平均曲率流の研究を  $V$  内の平均曲率流の研究に還元して行うことを考え、ヒルベルト空間内で正則化された平均曲率流という概念を導入し、ヒルベルト空間  $V$  上のある種のヒルベルトリー群作用に関して不変な水平的強凸超曲面を発生する正則化された平均曲率流の研究を創始していた。

(3) 1997年、M. Athanassenas がユークリッド空間内のある種の境界付き回転面を発生する体積を保存する平均曲率流の長時間挙動に関する結果を得た。その後、2009年、E. Cabezas-Rivas と V. Miquel が回転対称な空間内の同種の境界付き回転面を発生する体積を保存する平均曲率流に関して同種の結果を得ていた。

### 2. 研究の目的

本研究の主な目的は次の通りである。

(1) 非コンパクト型対称空間内の複素等焦部分多様体である種の良いフォーカル構造をもつものに対する等質性定理の証明をほぼ完成させていたが、証明において重要なギャップがあることを発見し、その重要なギャップを埋めること。

(2) ヒルベルト空間内のある種のヒルベルトリー群作用に関して不変な水平的強凸超曲面を発生する正則化された平均曲率流に関して水平的強凸性保存定理さらに1つのファイバーへの崩壊性定理を証明すること。

(3) E. Cabezas-Rivas と V. Miquel による回転対称な空間内のある種の境界付き回転面を発生する体積を保存する平均曲率流に関する結果の類似結果を、一般階数の対称空間内の鏡映部分多様体上の半径が一定でないチューブを発生する体積を保存する平均曲率流に対して得ること。

### 3. 研究の方法

(1) の研究方法は、次の通りである。まず、無限次元アンチケーラー空間内の余次元2以上のある種のアンチケーラー等径部分多様体のバナッハリー群作用による等質性定理を示す。次に、非コンパクト型対称空間  $G/K$  内の余次元2以上のある種の複素等焦部分多様体の等質性定理を、 $[0,1]$ 上の自明な  $G^c$  バンドルの接続の空間(これは無限次元アンチケーラー空間)から  $G^c$  への parallel transport map を通じてアンチケーラー等径部分多様体の等質性定理を用いて導出する。

(2) の研究方法は、次の通りである。まず、ヒルベルト空間内のある種のヒルベルトリー群作用に関して不変な水平的強凸超曲面を発生する正則化された平均曲率流に関して様々な幾何学量に対する発展方程式を導出し、最大値の原理を用いて水平的強凸性保存定理を証明する。次に、その保存性定理および部分多様体に対するソボレフ不等式をはじめとする様々な積分不等式を用いて1つのファイバーへの崩壊性定理を証明する。

(3) の研究方法は、次の通りである。まず、一般階数の対称空間内の鏡映部分多様体上の半径が一定でないチューブを発生する体積を保存する平均曲率流に関して様々な幾何学量に対する発展方程式を導出し、最大値の原理を用いてチューブ性保存定理を証明する。次に、その保存性定理および様々な積分不等式を用いて、有限時間での崩壊あるいは無限時間存在・収束性を調べる。

### 4. 研究成果

(1) の研究は、上述の研究方法によりほぼ完結し、完結版の論文を最終チェックした上投稿する予定である。

(2) の研究は、上述の研究方法により完結した。

(3) の研究は、上述の研究方法により、外の空間が階数1の非コンパクト型対称空間の場合に完結した。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計10件)

1 小池直之 Homogeneity of infinite dimensional anti-Kaehler isoparametric submanifolds II, Tokyo Journal of Mathematics

査読有 掲載決定済

2 小池直之 The mean curvature flow for invariant hypersurfaces in a Hilbert space

with an almost free group action, Asian Journal of Mathematics 査読有 掲載決定済

3 小池直之 Volume-preserving mean curvature flow for tubes in rank one symmetric spaces of non-compact type, Calculus of Variations and Partial Differential Equations 査読有 Vol. 56, 2017, doi:10.1007/s00526-017-1156-2

4 小池直之 A holonomy invariant anisotropic surface energy in a Riemannian manifold, Differential Geometry and Its Applications, 査読有 Vol. 44, 2016, 98-121 doi:10.1016/j.difgeo.2015.11.003

5 小池直之 On the indices of minimal orbits of Hermann actions, Hokkaido Mathematical Journal, 査読有 Vol. 44, 2015, 251-275 doi:10.14492/hokmj/1470053293

6 小池直之 A Cartan type identity for isoparametric hypersurfaces in symmetric spaces, Tohoku Mathematical Journal, 査読有 Vol. 66, 2014, 435-454 doi:10.2748/tmj/1412783206

7 小池直之 The constancy of principal curvatures of curvature-adapted submanifolds in symmetric spaces, Differential Geometry and Its Applications, 査読有 Vol. 35, 2014, 103-113 doi:10.1016/j.difgeo.2014.06.004

8 小池直之 Collapse of the mean curvature flow for isoparametric submanifolds in non-compact symmetric spaces, Kodai Mathematical Journal 査読有 Vol. 37, 2014, 355-382 doi:10.2996/kmj/1404393892

9 小池直之 Homogeneity of infinite dimensional anti-Kaehler isoparametric submanifolds, Tokyo Journal of Mathematics 査読有 Vol. 37, 2014, 159-178 doi:10.3836/tjm/1406552436

10 小池直之 Examples of certain kind of minimal orbits of Hermann actions, Hokkaido Mathematical Journal, 査読有 Vol. 43, 2014, 21-42 doi:10.14492/hokmj/1392906091

〔学会発表〕(計8件)

1 小池直之 Collapse of the regularized mean curvature flow for invariant hypersurfaces in a Hilbert space, The 13<sup>th</sup> OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifold Geometry and Lie Theory (招待講演), 2017年3月28日, 大阪市立大学

2 小池直之 Volume-preserving mean curvature flow for tubes with boundary in symmetric spaces, The First Japan-Taiwan Joint Conference on Differential Geometry & The 8<sup>th</sup> TIMS-OCAMI-Waseda Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis

(招待講演), 2016年12月14日, 早稲田大学

3 小池直之 Volume-preserving mean curvature flow for tubes in rank one symmetric spaces of non-compact type, The 20<sup>th</sup> International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds & The 12<sup>th</sup> OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifolds and Lie Theory (招待講演), 2016年7月28日, Kyungpook National University (Korea)

4 小池直之 Volume-preserving mean curvature flow for tubes in rank one symmetric spaces of non-compact type, RIMS 研究集会「Regularity, singularity and long time behavior for partial differential equations with conservation law」, (招待講演), 2016年6月7日, 京都大学数理解析研究所

5 小池直之 Volume-preserving mean curvature flow for tubes in symmetric spaces, The 11<sup>th</sup> OCAMI-RIRCM Joint Differential Geometry Workshop on Submanifolds and Lie Theory (招待講演), 2016年3月20日, 大阪市立大学

6 小池直之 無限次元線形空間へのリフトを利用した平均曲率流の研究について, Geometric flows and related problems, (招待講演), 2016年3月4日, 東京工業大学

7 小池直之 The regularized mean curvature flow for invariant hypersurfaces in a Hilbert space, Souel ICM 2014 Satellite Conference on Real and Complex Submanifolds, (招待講演), 2014年8月11日, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon (Korea)

8 小池直之 The regularized mean curvature flow for invariant hypersurfaces in a Hilbert space with an almost free Lie group action, RIMS 研究集会「群作用と部分多様体論の展開」, (招待講演), 2014年6月26日, 京都大学数理解析研究所

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

小池 直之 (NAOYUKI KOIKE)  
東京理科大学・理学部第一部数学科・教授  
研究者番号：00281410

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

##### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：

##### (4) 研究協力者

( )