

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 18 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400082

研究課題名(和文) 4次元Lefschetzファイバー空間のトポロジー

研究課題名(英文) Topology of Lefschetz fibrations on 4-manifolds

研究代表者

遠藤 久顕 (Endo, Hisaaki)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号：20323777

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題は4次元多様体の位相幾何学(トポロジー)に関するものであり、特にLefschetzファイバー空間と呼ばれる幾何学的対象を主に扱っている。Lefschetzファイバー空間は、曲面(2次元多様体)によってパラメータ付けられた(特異点を持つ)曲面の族であり、曲面の写像類群を用いて組合せ的に研究することができる。本研究課題では、曲面上の有限グラフを用いることにより、Lefschetzファイバー空間の安定化定理を証明した。

研究成果の概要(英文)：We studied the topology of 4-dimensional manifolds, in particular, that of Lefschetz fibrations on 4-dimensional manifolds in this research project. A Lefschetz fibration is a family of (possibly singular) surfaces parametrized by a surface and it is often studied by using the mapping class group of the fiber surface from combinatorial points of view. In this project we made use of finite graphs on surfaces to prove two stabilization theorems on Lefschetz fibrations.

研究分野：位相幾何学(トポロジー)

キーワード：4次元多様体 写像類群 Lefschetzファイバー空間 モノドロミー ファイバー和 安定化 一般チャート理論 超楕円性

1. 研究開始当初の背景

Lefschetz ファイバー空間はもともと Lefschetz が射影代数多様体の位相幾何学を研究した際に導入した Lefschetz pencil に由来する概念である。4次元トポロジーにおいては、楕円曲面の微分同相類に関連して種数 1 の Lefschetz ファイバー空間が詳しく研究されていたが、1998 年に Donaldson と Gompf により 4次元シンプレクティック多様体との密接な関係が明らかにされるに至り、種数 2 以上の場合の研究が活発化した。4次元多様体に Lefschetz ファイバー空間の構造を考えることの利点は、モノドロミー表現を通して曲面の写像類群との密接な関係が生じることである。すなわち、4次元シンプレクティック多様体の位相幾何学的な研究が、写像類群の元の組み合わせ的な研究に帰着される。現在では、すべての 4次元多様体が broken Lefschetz fibration と呼ばれる Lefschetz ファイバー空間の拡張概念にあたる構造をもつことが示されており、Lefschetz ファイバー空間とその変種の研究は 4次元多様体の一般論を建設する際の一つの有力な方法を与えられられる。

研究代表者は松本幸夫氏による種数 2 の場合の先駆的な研究に影響を受け、1998 年頃に Donaldson や Gompf らとは独立に Lefschetz ファイバー空間の研究を開始した。初期の研究では、超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の局所符号数公式や写像類群の関係子を用いた方法などにより、Lefschetz ファイバー空間の符号数の計算法を確立した。その後の研究では、超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の構成法やモノドロミー置換とよばれる手法を詳しく研究し、Lefschetz ファイバー空間の構成的側面の解明に努めた。一方、国内外の研究動向に目を向けると、Lefschetz ファイバー空間の研究はこの 15 年間に様々な方向へ発展していることがわかる。とりわけ進展著しいのは、Seidel によって創められた (4次元とは限らない) Lefschetz ファイバー空間の有向深谷圏の研究や、3次元接触多様体のオープンブック分解や Stein 充填との関連などであろう。しかし、これらはむしろミラー対称性や接触構造のほうに軸足があるように思われる。

2. 研究の目的

本研究課題は、Lefschetz ファイバー空間を通して 4次元多様体のトポロジーを解明することを目的として実施された。Lefschetz ファイバー空間の研究は広がりを見せているが、4次元トポロジーにおける Lefschetz ファイバー空間の重要性が減ったわけではない。本研究課題では、研究代表者のこれまでの研究を深化・発展させ、4次元多様体のファイバー構造・微分構造・不変量を、主に写像類群の表示・コホモロジー・表現との関係から研究することを目的とした。

具体的な研究課題として取り上げたもの

は次の 3 つである。

(1) チャート表示を用いた Lefschetz ファイバー空間のモノドロミーの研究：チャート表示は鎌田聖一氏 (大阪市立大学) によって開発されたモノドロミーの図示法であり、Lefschetz ファイバー空間の構成や分類に威力を発揮する。これを利用することにより、Lefschetz ファイバー空間のファイバー和に関する種々の安定化定理を確立する。また、特に低種数や超楕円的な場合の同型分類を考察し、適当な条件の下での完全な分類を行う。

(2) 4次元多様体の改変操作とモノドロミー置換との関係の研究：4次元多様体の改変操作としてよく知られたものには、対数変換、結び目手術、ファイバー和、有理ブローダウン、連結和、分岐被覆、コルクツイストなどがある。一方、写像類群には lantern, star, daisy などの関係子や松本眞氏による関係子が知られており、これらを用いて Lefschetz ファイバー空間のモノドロミーを書き換えることができる。研究代表者のこれまでの研究により、(一般化された) 有理ブローダウンと (一般化された) lantern 関係子や daisy 関係子については興味深い関係が発見されている。上に挙げた他の改変操作や関係子についても、このような相互関係を明らかにする。

(3) Lefschetz ファイバー空間の新しい不変量の探求：Lefschetz ファイバー空間の Euler 標数、符号数、スピン構造の有無については、Smith, Stipsicz, Ozbagci や、永見誠二氏 (摂南大学) と研究代表者の研究により計算法は確立されたと言ってよい。これらは 4次元多様体の位相不変量であり、モノドロミーの観点からは、一般ファイバーの 1次元ホモロジー群への写像類群の作用 (シンプレクティック表現) のみから決まる不変量である。そこで、Lefschetz ファイバー空間のより精密な不変量、特にモノドロミーの Torelli 群に由来する情報をもつ不変量やファイバー和に関して加法的でない不変量の構成を目指す。

3. 研究の方法

上記の項目 2 で述べた研究の目的を踏まえ、実際の研究を行う際に採った研究方法は以下のようなものである。

(1) 一般チャート理論と写像類群の Wajnryb 表示を用いた Lefschetz ファイバー空間のモノドロミーの記述

(2) 永見誠二氏と研究代表者による符号数公式のチャートを用いた定式化 (長谷川功氏によるもの)

(3) 一般チャート理論と超楕円的写像類群の Birman-Hilden 表示を用いた超楕円的 Lefschetz ファイバー空間のモノドロミーの記述

(4) 点付き球面の写像類群の 2 つの中心拡大の解析

また、平成 26 年度から研究課題の一つに加えた Andrei Pajitnov 氏（ナント大学）との共同研究においては、次のような研究方法を採った。

(5) 円周値 Morse 理論の 2 次元結び目補空間への応用

4. 研究成果

項目 2 で述べた 3 つの研究課題のうち、特に(1)に関して芳しい進展がみられた。また、(3)についても限定された状況のもとで一定の成果が得られた。一方、(2)については、研究代表者の研究室に所属する大学院生によっていくつかの結果が得られた。(1)、(3)について、具体的に得られた結果を以下に詳述する。また、Andrei Pajitnov 氏との共同研究の進捗状況についても報告する。

(1) チャート表示を用いた Lefschetz ファイバー空間のモノドロミーの研究に関しては、鎌田聖一氏（大阪市立大学）、田中心氏（東京学芸大学）、長谷川功氏（厚生労働省）との共同研究により、ファイバー和による安定化定理を十分に一般的な条件の下で証明した。特に、Lefschetz ファイバー空間の安定同型類の完全不変量を特定した。それに伴い、永見誠二氏（摂南大学）と研究代表者による符号数定理の一般化も得られた。この研究は長谷川氏による先行研究を一般化したものである。また、鎌田氏との共同研究によって得られた超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の安定化定理を改良した。特に、超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の安定同型類の完全不変量を特定した。

(3) 点付き球面の写像類群は、2 つのよく知られた中心拡大を持つ。一つは超楕円的写像類群であり、もう一つは球面上のブレイド群である。本質的には後者の拡大の核（Dirac ブレイド）の「数え上げ」を用いることにより、超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の不変量を構成した（鎌田聖一氏との共同研究）。その際、モノドロミーに内在する関係子を明示化するため、一般チャート理論を援用した。この不変量は、ブレイド・モノドロミー技法に基づく Auroux-Smith の不変量に一致すると予想される。また、この不変量を用いることにより、同型でない 2 つの Lefschetz ファイバー空間が 1 回の安定化により同型となる例や、同型でない 2 つの Lefschetz ファイバー空間であって、特異ファイバーの各タイプごとの本数が等しい例など、興味深い具体例を構成した。

平成 26 年度に開始した Andrei Pajitnov 氏との共同研究では、円周値 Morse 理論を 2 次元結び目に適用することにより、2 次元結び目の Morse-Novikov 数を定義した。Pajitnov 氏は 2001 年に Rudolph, Weber と共に古典的結び目の Morse-Novikov 数を定義し、その様々な性質を研究している。この研究における知見が 2 次元結び目の場合に生かされる可能性は高いと考えられ、本研究

課題終了後も 2 次元結び目、あるいは曲面結び目の Morse-Novikov 数に関する研究を継続することとしている。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 3 件)

遠藤久顕, Lefschetz ファイバー空間, 数学, 第 69 巻, 第 2 号, 2017 年 4 月, 157—180, 査読あり, 冊子体での出版.
Hisaaki Endo and Seiichi Kamada, Counting Dirac braid relators and hyperelliptic Lefschetz fibrations, Transactions of the London Mathematical Society に掲載決定, 査読あり, [URL:https://arxiv.org/abs/1508.07687](https://arxiv.org/abs/1508.07687)
Hisaaki Endo, Isao Hasegawa, Seiichi Kamada, and Kokoro Tanaka, Charts, signatures, and stabilizations of Lefschetz fibrations, In: Interactions between low-dimensional topology and mapping class groups (Max Planck 2013), Geometry & Topology Monographs 19 (2015), 237—267, DOI: 10.2140/gtm.2015.19.237.

〔学会発表〕(計 9 件)

Hisaaki Endo, Stabilization theorems of Lefschetz fibrations, Seminaire de topologie, geometrie et algebre, November 3, 2016, Universite de Nantes, Nantes, France.

遠藤久顕, Lefschetz ファイバー空間のトポロジー, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会特別講演(トポロジー分科会), 2016 年 9 月 15—18 日(発表日: 9 月 15 日, 14:15—15:15), 関西大学千里山キャンパス第 4 学舎 3 号館 4 階 3401 (大阪府吹田市)

遠藤久顕, 超楕円的 Lefschetz ファイバー空間と Dirac ブレイド, 研究集会「微分トポロジー 2016」, 2016 年 3 月 20—22 日(発表日: 3 月 20 日, 14:00—15:00), 筑波大学自然科学系 D 棟 509 (茨城県つくば市)

遠藤久顕, Lefschetz ファイバー空間へのチャートの応用について, 第 61 回トポロジーシンポジウム, 2014 年 7 月 26—29 日(発表日: 7 月 28 日, 11:00—12:00), 東北大学片平キャンパスさくらホール(宮城県仙台市)

遠藤久顕, 一般化されたチャートと Lefschetz ファイバー空間, 研究集会「写像類群における関係とレフシェッツ束空間」, 2014 年 3 月 19—21 日(発表日: 3 月 21 日, 13:20—14:50), 九州工業大学サテライト福岡天神(福岡県福岡市)

Hisaaki Endo, Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization, Seminaire de topologie et de geometrie algebrique, March 13, 2014, Universite de Nantes, Nantes, France.

Hisaaki Endo, Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization, International Conference on Topology and Geometry 2013, Joint with the 6th Japan-Mexico Topology Symposium, September 2—6, 2013 (the lecture was given on September 2), Shimane University, Matsue, Japan.

Hisaaki Endo, Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization, Workshop and Conference on the Topology and Invariants of Smooth 4-Manifolds, July 31 to August 10, 2013 (the lecture was given on August 8, 13:30—14:30), University of Minnesota, Twin Cities, Minneapolis, USA.

Hisaaki Endo, Lefschetz fibrations and the signature cocycle, Conference on interactions between low dimensional topology and mapping class groups, July 1 to 5, 2013 (the lecture was given on July 5), Max Plank Institute for Mathematics, Bonn, Germany.

〔その他〕

研究代表者ホームページ（日本語）:

<http://www.math.titech.ac.jp/~endo/index.html>

研究代表者ホームページ（英語）:

<http://www.math.titech.ac.jp/~endo/index-en.html>

東京工業大学リサーチリポジトリ T2R2 :

http://t2r2.star.titech.ac.jp/cgi-bin/researcherpublicationlist.cgi?q_researcher_content_number=CTT100380203&alldisp=1&tab_yf=2017

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

遠藤 久顕 (ENDO, Hisaaki)

東京工業大学・理学院・教授

研究者番号 : 2 0 3 2 3 7 7 7

(2) 研究分担者

菊池 和徳 (KIKUCHI, Kazunori)

大阪大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号 : 4 0 2 5 2 5 7 2

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

早野 健太 (HAYANO, Kenta)

湯浅 亘 (YUASA, Wataru)