

平成 29 年 6 月 13 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400083

研究課題名(和文)二次特性類の幾何学

研究課題名(英文)Geometry of secondary characteristic classes

研究代表者

寺嶋 郁二(Terashima, Yuji)

東京工業大学・情報理工学院・准教授

研究者番号：70361764

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者は山崎雅人氏との共同研究で提案した新しい3次元ゲージ理論の分配関数の本質的な情報を数学的に厳密な方法で取り出すことを一つの動機として、加藤晃史氏との共同研究で、クイバ-のミューテーションの列について、分配級数という新しい量を導入し、その基本性質を示した。特に、ディンキン型またはその積の特別なミューテーションの列について、分配級数がアフィンリー環の表現の指標の和のフェルミオン表示に一致していることを示した。また、ミューテーションの終赤列について分配級数の次数付き版が本質的に組合せのドナルドソン・トーマス不変量と一致していることを示すことができた。

研究成果の概要(英文)：We have introduced new quantities called partition q-series for quiver mutation sequences and proved fundamental properties in a joint work with Akishi Kato. One motivation is to provide a solid mathematical foundation to extract essential information of the partition function of a 3-dimensional gauge theory proposed in a joint work with Masahito Yamazaki. In particular, for quivers which are of Dynkin type or square products thereof with special mutation sequences, we have proved that partition q-series are identified with fermionic character formulas of certain modules associated with affine Lie algebras. Moreover, for reddening sequences, we have proved that a graded version of partition q-series essentially coincides with the combinatorial Donaldson-Thomas invariant.

研究分野：数物系科学

キーワード：微分トポロジー 特性類 数論的トポロジー ゲージ場の物理 クラスター変換 ミューテーション

1. 研究開始当初の背景

二次特性類は様々な分野，特にトポロジー，数論，ゲージ場の物理に共通して現れる．そこで，二次特性類を手がかりにしてトポロジー，数論，ゲージ場の物理を統一的な視点から調べることをはじめた．もともと，トポロジーにおいて，特性類は決定的な役割を果たしてきた．多様体が複素構造や葉層構造のようなより精密な構造を持つとき，その構造を感知するより精密な特性類（二次特性類）が必要になる．二次特性類は，その精密さゆえに，数論幾何，ゲージ場の物理のような様々な場所に思いがけず現れ，重要な役割を果たす．

二次特性類に着目した出発点の一つとして，五味清紀氏（信州大学）と研究代表者の共同研究

K. Gomi, Y. Terashima, Chern-Weil construction for twisted K-theory, *Comm. Math. Phys.* 299 (2010), no. 1, 225--254.

K. Gomi, Y. Terashima, Discrete torsion phases as topological actions, *Comm. Math. Phys.* 287 (2009), no. 3, 889--901.

K. Gomi, Y. Terashima, Higher-dimensional Parallel Transports, *Math. Res. Lett.* 8, 2001, no. 1, 25-35.

K. Gomi, Y. Terashima, A Fiber Integration Formula for the Smooth Deligne Cohomology, *IMRN*, 2000, no. 13, 699-708.

で発展させたねじれ K 理論の特性類の明示的な構成と滑らかなドリーニュ・コホモロジーの積分理論が，二次特性類のレギュレーター構成に有効であろう，と考えたことにある．

レギュレーターは数論幾何に現れる具体的な二次特性類であり，代数多様体の代数的ベクトル束の高次の代数的 K 群の特性類であるレギュレーターは，導入されるとすぐにベイリンソン予想などの数論幾何の様々な場面で中心的な役割を担った．しかし，具体的にレギュレーターを計算しようとするとき，たちまち，困難が現れる．その主な理由は，現在知られているレギュレーター構成方法が，いずれも存在定理を用いていて，明示的な構成ではないことにあると考えられる．実際に，上で述べた五味清紀氏と研究代表者との共同研究で発展させた理論を用いると，零次の代数的 K 群の場合には，レギュレーターの明示的な構成をすることができた．

この構成の主な利点は二つあった．一つは，代数幾何的な枠組みを出ることで，微分形式のフィルターづけが与えられているときに，いつでも適用できる設定になっていること

である．例えば，葉層構造の場合に，この方法を適用して得られる特性類は，ドリーニュ・コホモロジーの葉層構造版に値をもつ新しい特性類であり，レギュレーターの数論幾何における重要性を考えると，研究する価値があると考えた．

もう一つの利点は，付加的な道具である接続の局所的な族を選ぶと，二次特性類がコサイクルのレベルで得られることである．このことは，具体的な計算を実行しようとするときに決定的に重要である．つまり，付加的な道具をうまく選ぶことで，計算可能な局所的な式を得るという方法が使えるようになる．この有用性は，例えば，特性類（古典的なオイラー類や I. M. Gelfand たちによる第一ポントリャーギン類の場合など）の組み合わせ的な式が，付加的な道具に対応するコサイクルの式を得てから，単体分割にうまく合う付加的な道具を適用するという二段階で得られることを考えるとはっきりする．

そこで，この零次の代数的 K 群でうまくいった構成を高次の代数的 K 群の場合に拡張し，数論的に重要な多様体上でレギュレーターの具体的な計算を実行することを考えた．実際に，このような特性類に対応するべきものが森下昌紀氏（九州大学）と研究代表者の共同研究

M. Morishita, Y. Terashima, Geometry of polysymbols, *Math. Res. Lett.* 15, 2008, no. 1, 95-115.

M. Morishita, Y. Terashima, Chern-Simons variation and Deligne cohomology, *Contemp. Math.* 484, 2009, 127--134.

をしている過程に現れ，それを具体的な計算によって特定したいということが研究代表者の動機の一つであった．

また，レギュレーターと双曲体積に共通に現れる多重対数関数はゲージ場の物理にも思いがけず現れている．実際に，山崎雅人氏（IPMU）と研究代表者の共同研究

Y. Terashima, M. Yamazaki, Emergent 3-manifolds from four dimensional superconformal indices, *Phys. Rev. Lett.* 109, (2012) 091602.

で 3 次元双曲幾何とゲージ場の物理との間の新しい関係を見つけた．この発見はゲージ場の物理の分配関数に現れた多重対数関数を双曲幾何の言葉で解釈しようとする試みを一つの出発点とし，研究の過程で，双曲幾何だけでなく，ゲージ場の物理にも高次の代数的 K 群が見え隠れしているのが分かった．このように，二次特性類の研究を通して，数論幾何と双曲幾何とゲージ場の物理のより深い関係が見つけられるのではないかと考えた．

2. 研究の目的

本研究の目的は、二次特性類を手がかりにして、トポロジーと数論幾何とゲージ場の物理の間に橋をかけ、今までになかった統一的視点を得ることにある。

このために、数論幾何に現れる二次特性類であり、ゲージ場の物理にも見え隠れする高次の代数的 K 群のレギュレーターについて、トポロジーの道具を利用して明示的な構成をし、数論幾何で重要な具体例での計算を実行し、そのことで、今まで抽象的な同型を通じて理解されていた数論幾何におけるレギュレーターとトポロジーにおける双曲多様体の双曲体積の関係をより具体的に理解したい。

3. 研究の方法

クイバーのミューテーションや双曲的3次元多様体の理想四面体分割やクラスター変換などを用いて、分配関数や双曲体積などの明示的な表示を得ることや具体的な計算を実行することと、その計算をゲージ場の物理や数論の全く別の文脈で新しい解釈を与えることに研究の方法の特徴がある。

4. 研究成果

山崎雅人氏 (IPMU) との共同研究において発見した3次元多様体の双曲幾何と3次元のゲージ理論の関係についての研究を引き続き行い、一点穴あきトーラスの写像類の写像トーラスの場合について双曲体積とゲージ理論の分配関数の関係を明確にすることができた。この結果を学術論文誌に Y. Terashima and M. Yamazaki, *Semiclassical Analysis of the 3d/3d Relation*, Phys. Rev. D (2013) として発表することができた。さらに、山崎雅人氏との共同研究で、3次元多様体とゲージ理論に共通する骨組みとしてクイバーのミューテーションの列が取り出せるという新しい着眼点を得て、クイバーのミューテーションの列に付随する新しい3次元ゲージ理論のクラスを提案してその性質を詳しく考察した。この結果を学術論文誌に Y. Terashima and M. Yamazaki, *N=2 theories from cluster algebras*, PTEP (2014) として発表することができた。

この新しい3次元ゲージ理論の分配関数の本質的な情報を数学的に厳密な方法で取り出すことを一つの動機として、加藤晃史氏 (東京大学) との共同研究で、クイバーの境界条件付きのミューテーションの列について、分配級数という新しい量を導入した。分配級数は一般ペンタゴン変形について不変であることを示した。また、ディンキン型またはその積の特別なミューテーションの列について、分配級数がアフィンリー環の表現の指標の和のフェルミオン表示に一致していることを発見した。この結果を学術論文誌に A. Kato, Y. Terashima, *Quiver Mutation*

Loops and Partition q-Series", Comm. Math. Phys. 336, no. 2, pp 811-830. (2015) として発表した。つづいて、ミューテーションの終赤列とその自然な境界条件について分配級数の精密化が組合せ的ドナルドソン・トーマス不変量と一致していることを示すことができ、学術論文誌に Akishi Kato and Yuji Terashima, *"Quantum Dilogarithms and Partition q-Series"*, Comm. Math. Phys. 338, no. 1, pp 457-481. (2015) として発表した。森下昌紀氏 (九州大学) との共同研究で、トポロジーで重要な役割を果たすジョンソン準同型の理論を岩澤理論の文脈に持ち込むという新しい着眼点を得て、その基礎的な性質を証明することができた。この結果を学術論文誌に M. Morishita, Y. Terashima, *"p-Johnson homomorphisms and pro-p groups"*, Journal of Algebra, 479, 1, 102-136 (2017) として発表した。

北山貴裕氏 (東京大学) との共同研究で、点つき曲面束の $PGL(n, \mathbb{C})$ 平坦束のモジュライ空間上のトーション関数を導入し、クラスター変換を用いて、ヤコビ行列式の言葉で解釈できることを示し、学術論文誌に Takahiro Kitayama and Yuji Terashima, *"Torsion functions on moduli spaces in view of the cluster algebra"*, Geom. Dedicata, 175, Issue 1, pp 125-143, (2015) として発表した。

森下・高倉・植木氏との共同研究で結び目の表現の普遍変形環を導入し考察した論文 M. Morishita, Y. Takakura, Y. Terashima, J. Ueki, *"On the universal deformations for SL_2 -representations of knot groups"*, Tohoku Math. J. 69, Number 1, (2017) に発表した。

松雪敬寛氏 (東京工業大学) との共同研究でファイバー束の特性類を構成した論文 T. Matsuyuki, Y. Terashima, *"Characteristic classes of fiber bundles"*

, Algebraic & Geometric Topology, 16, no. 5, 3029--3050. (2016) に発表した。

結び目の表現空間上の L 関数を導入し、その基本的な性質を示した北山・森下・丹下氏との研究成果をまとめた論文が T. Kitayama, M. Morishita, R. Tange, Y. Terashima, *"On certain L-functions for deformations of knot group representations"*, to appear in Transactions of the AMS として学術論文誌に掲載されることになった。

ミューテーションの列についての分配関数を導入し、量子ダイログ関数との関係を示した加藤・水野氏との研究成果をまとめた論文が A. Kato, Y. Mizuno, Y. Terashima, *"Quiver mutation sequences and q-binomial identities"*, to appear in IMRN として学術論文誌に掲載されることになった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

研究者番号 : 70361764

〔雑誌論文〕(計 10 件)

A. Kato, Y. Mizuno, Y. Terashima,
Quiver mutation sequences and q-binomial
identities, to appear in IMRN. 査読有り

(2)研究分担者
なし.

T. Kitayama, M. Morishita, R. Tange, Y. Terashima,
On certain L-functions for
deformations of knot group
representations, to appear in
Transactions of the AMS. 査読有り

(3)連携研究者
なし

M. Morishita, Y. Terashima, "p-Johnson
homomorphisms and pro-p groups", Journal
of Algebra, 査読有り, 479, 1, 102-136
(2017)

(4)研究協力者
なし

M. Morishita, Y. Takakura, Y. Terashima,
J. Ueki, On the universal deformations for
SL₂-representations of knot groups,
Tohoku Math. J. 査読有り, Volume 69,
Number 1, (2017)

T. Matsuyuki, Y. Terashima,
"Characteristic classes of fiber
bundles",
Algebr. Geom. Topol. 査読有り, 16, no. 5,
3029--3050. (2016)

T. Kitayama, Y. Terashima, Torsion
functions on moduli spaces in view of the
cluster algebra,
Geometriae Dedicata, 査読有り, Volume 175,
Issue 1, pp 125-143, (2015)

A. Kato, Y. Terashima, Quantum
Dilogarithms and Partition q-Series,
Communications in Mathematical Physics,
査読有り, 338, no. 1, pp 457-481,
(2015)

A. Kato, Y. Terashima, Quiver
Mutation Loops and Partition q-Series",
Comm. Math. Phys. 査読有り, 336, no. 2, pp
811-830. (2015)

Y. Terashima, M. Yamazaki, N=2 theories
from cluster algebras, PTEP, 査読有り,
DOI:10.1093/ptep/ptt115 (2014)

Y. Terashima, M. Yamazaki,
Semiclassical analysis of
the 3d/3d relation, Phys.Rev.D, 査読有,
DOI:10.1103/PhysRevD.88.026011 (2013)

6. 研究組織

(1)研究代表者

寺嶋 郁二 (TERASHIMA YUJI)

東京工業大学・情報理工学院・准教授