

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 10 月 24 日現在

機関番号：13903

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400086

研究課題名(和文) 曲面，曲線と結び目の位相的性質

研究課題名(英文) topological properties of knots and surfaces

研究代表者

平澤 美可三 (Hirasawa, Mikami)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：00337908

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：三次元空間(特に三次元球面)における絡まった閉曲線のことを結び目，またそれらの集まりを絡み目と呼ぶ．構成する曲線を切断せず連続変形で移り合うものを同値とみなす．絡み目を境界としてもつ有向曲面(ザイフェルト曲面)を用いて，絡み目の位相的性質の研究を行った．特にサイクルグラフから得られるコクセター絡み目や，特別な樹状絡み目について，アレクサンダー多項式の零点の配置に関する成果を上げた．また，与えられたアレクサンダー多項式について，その係数が直接現れるザイフェルト行列や最小種数ザイフェルト曲面を構成した．

研究成果の概要(英文)：A tangled circle in the 3-space is called a knot, and a set of knots is called a link. We regard two knots to be equivalent when they can be deformed continuously into each other. We study topological properties of knots and links by orientable surfaces whose boundary coincide with them. We characterized distributions of the zeros of Alexander polynomial of Coxeter links corresponding to cycle graphs, and some specific arborescent links. For a given Alexander polynomial, we gave a simple and direct method to realize it by a knot.

研究分野：数物系科学

キーワード：結び目理論 アレクサンダー多項式 ザイフェルト曲面

1. 研究開始当初の背景

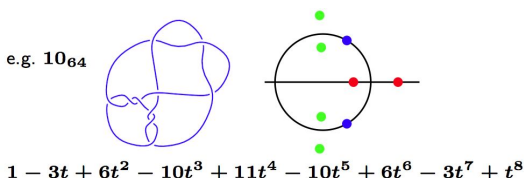
三次元空間(特に三次元球面)における絡まった閉曲線のことを結び目、またそれらの集まりを絡み目と呼ぶ。構成する曲線を切断せず連続変形で移り合うものを同値とみなす。結び目の古典的な多項式不変量としてアレクサンダー多項式に注目する。従来の研究では、その係数が主に研究されてきた。一方近年の計算機の発達により、様々な絡み目の多項式を、その零点までこめて計算する事が可能になり、絡み目の個性が係数よりもむしろ零点の配置に反映する状況に関する予想などが得られている。こうしたことから零点の配置の研究が始まっている。結び目のもつ幾何学的な特徴(交代性)などがアレクサンダー多項式にどう反映するかは興味深い問題であり、係数に関する様々な結果が知られている。ここで零点に関しては、例えば Hoste によって「交代結び目のアレクサンダー多項式の零点の実部は -1 より大きい」といった予想が提案されている。これまで零点の配置について、様々な研究を行ってきた。

2. 研究の目的

三次元空間(特に三次元球面)における結び目、絡み目の位相幾何学的な性質を研究対象とする。例えば、(i) どの様にうまく配置できるか (ii) 補空間の構造はどうなっているか (iii) 不変量はどのように振る舞うか などが挙げられる。三次元空間内に境界付きの曲面が埋め込まれている場合、または閉曲面がはめ込まれているとき曲面自体についても上の様な問題が考えられる。本研究では、結び目や曲面を視る若しくは見えるようにすることで、その性質を明らかにしまたそれを応用してゆくことを目的とする。特に、理論的な知見に加え実用的な方法論も展開する。

3. 研究の方法

結び目を位相的に捕えるにはある程度固定することが望ましいが、結び目を境界とする有向曲面であるザイフェルト曲面がその役割をうまく果たす。また、ザイフェルト曲面はそれ自体として興味深い研究対象である。主に曲面に注目し、その境界として現れる結び目、絡み目の位相的性質を研究する。特に結び目のザイフェルト曲面とよく馴染むアレクサンダー多項式の性質について調べる。結び目の性質がアレクサンダー多項式の零点の配置に影響する状況を調べる。下図は結び目 10-64 とそのアレクサンダー多項式の零点のプロットである。



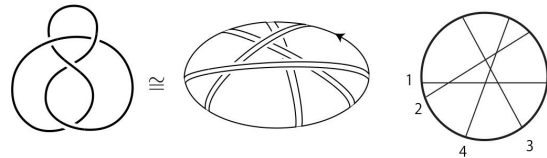
結び目、絡み目の性質が零点の配置に反映している状況としては、(i) 零点が全て実数であるか、(ii) 虚数で単位円周上に乗っているか、または (iii) 実数または単位円周上にあるもの、に注目する。そういった絡み目の具体例を構成する方法については、すでに様々な方法を開発済みである。アレクサンダー多項式を実対称行列の固有多項式とみなしたり、行列の符号数を用いる方法がある。

4. 研究成果

以下に述べる成果の内、(1) と (2) はトロント大学の村杉邦男名誉教授との共同研究の結果である。

(1) サイクルグラフに対応するコクセター絡み目について。

円板内にはめ込まれた単純アークの集まりをコードダイアグラムと呼ぶ。アークに自然数のラベルが与えられているとき、それに対応して平坦なバンドを取り付けて曲面が得られる。どのような絡み目も、その様にして得られるザイフェルト曲面の境界として現れることは、既に証明済みである。下図は八の字結び目が得られる様子を表している。

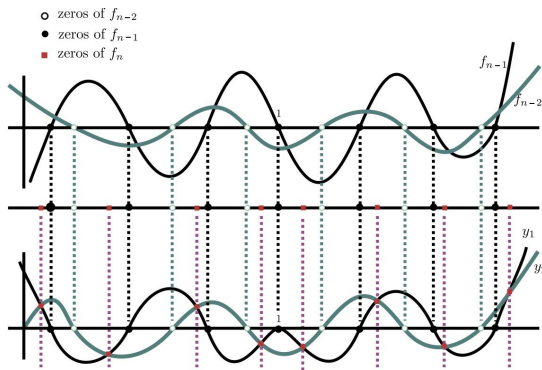


全てのバンドについて、平坦ではなく、同じ向き of 1 回捻りを入れることでファイバー曲面が得られる。これはホップブラミングの特別な例になっている。アークにラベルと向きが与えられたコードダイアグラムがコクセターシステムに対応する時、そこから得られる絡み目をコクセター絡み目という。コクセター絡み目のアレクサンダー多項式の零点に関する研究の手始めとして、コードダイアグラムに対応するグラフがサイクルグラフになるものに注目した。まず、サイクルグラフが表す絡み目の内、それがコクセター絡み目になっているものを決定した。次にそのアレクサンダー多項式を求めた。サイクルグラフ絡み目の成分数は 2 か 3 になることから、多変数のアレクサンダー多項式をまず決定し、1 変数アレクサンダー多項式に帰着した。さらに多項式の零点の配置を決定した。それらは全て単位円周上に乗っている事が分かった。サイクルグラフに対応するという条件が、アレクサンダー多項式の零点が全て単位円周上に乗るという形に反映することが興味深い結果である。

(2) 零点がインターレースする多項式について.

アレクサンダー多項式の実零点が実軸上に交互に並ぶとき, それらをインターレースした多項式と呼ぶ.

下図は実零点をもつ二つの多項式から実零点のみをもつ新しい多項式が得られる様子を描いている.



インターレース特性の活用法を探った. これまでの研究では, 実零点のみを持つ多項式に関する活用法が主であったが, 本研究では, 単位円周上に複素零点をもつ多項式をも扱える手法を推進した.

成果として, ウェイトに関するある種の条件を満たすクラスの樹状絡み目について, 零点は実数か単位円周上の複素数であることを証明した. 樹状絡み目の最も単純な例は二橋結び目である. その場合, 対応するグラフは直線状になり, そのウェイトの符号が交代するとき, アレクサンダー多項式の零点はすべて実数になるが知られていた. 今回調べたグラフがツリーになる状況では, 単位円周上の複素数が現れるために複雑になるが, うまく変数変換することで実零点のみをもつ多項式に置き直し, 樹状絡み目同志でインターレース特性が使える状況に帰着させた. これにより, インターレース特性を利用する方法の可能性が広がり, 更に研究が発展すると期待される.

(3) 与えられたアレクサンダー多項式を実現する結び目のザイフェルト行列とザイフェルト曲面の構成.

結び目の局所変形と零点の配置の変化について, ザイフェルト曲面の観点から研究を進めている. 例えば, ザイフェルト曲面を捻る(特に, 結び目に交差交換を行う)と, それに連動して零点が引きずられて動く様子が考察されている. 結び目の多項式の係数について, 興味深い成果が得られた. それは, 与えられたアレクサンダー多項式に対して, その

係数が直接現れるザイフェルト行列と最小種数曲面の構成である. それにより, 特定の係数を1だけずらす操作を曲面まで込めた結び目の交差交換によって簡単に実現できるようになった. これまでの構成はアレクサンダー多項式を一旦コンウェイ多項式に変換してから結び目を構成したり, 係数から得られる連立方程式を解いてバンドの捻りを決定するものが主流であった. 本成果の特徴は, アレクサンダー多項式から直接, しかも簡単に結び目が構成できるようになったことにある.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計1件)

1. M. Hirasawa and K. Murasugi
On stability of Alexander polynomials of knots and links (survey) 査読有
Knots in Poland III, Banach Center Publications, 100 (2014) P 85-98

[学会発表](計7件)

1. 平澤美可三
「絡み目のアレクサンダー多項式の零点の配置について」
九州大学幾何学セミナー
2016年1月14日.
九州大学
2. 平澤美可三
「On the distributions of the zeros of Alexander polynomials of knots」
Quantum Topology Seminar.
2015年8月27日.
米国イリノイ大学シカゴ校
3. 平澤美可三
「絡み目のアレクサンダー多項式の零点の配置について」
拡大K00Kセミナー2015.
2015年8月21日.
神戸大学
4. 平澤美可三
「On the zeros of the Alexander polynomials of quasi-rational knots」
国際数学会議サテライトカンフェレンス
Knots and Low Dimensional Manifolds
2014年8月25日.
韓国 釜山
5. 平澤美可三
「絡み目のアレクサンダー多項式の零点の配置について」
第61回トポロジーシンポジウム.
2014年7月27日.
東北大学

6. 平澤美可三

「On the distributions of the zeros of Alexander polynomials of knots」
13th Serbian Mathematical Congress .
2014年5月21日 .
セルビア Vrnjacka Banja

7. 平澤美可三

「On coxeter links associated to cycle graphs」
Knot theory and its applications .
2013年12月18日 .
インド モハリ

〔その他〕

ホームページ等

http://researcher.nitech.ac.jp/html/100000100_ja.html

6 . 研究組織

(1)研究代表者

平澤 美可三 (HIRASAWA Mikami)
名古屋工業大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：00337908

(2)連携研究者

山本 稔 (YAMAMOTO Minoru)
弘前大学・教育学部・准教授
研究者番号：40435475

(3)研究協力者

村杉 邦男(MURASUGI Kunio)
トロント大学・名誉教授