様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ３ 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４０００９０

研究課題名（和文）曲面結び目理論におけるタングル的手法の開発とその応用

研究課題名（英文）Development of tangle-method in surface-knot theory and its applications

研究代表者
佐藤　進（Satoh, Shin）

神戸大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：９０３４５００９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：４次元空間に埋め込まれた閉曲面を曲面結び目という。この研究では曲面結び目の性質を曲面タングルおよびその置換である局所変形の観点から明らかにした。自明な曲面タングルによる分解をもつ曲面結び目を特徴付けたり、布構造をもつ曲面タングルの分離性などを示した。
一方で、種数１の曲面結び目を表現する仮想結び目と溶接結び目の性質も明らかにした。３ステイト数が０になる結び目を特徴付けたり、フォックス彩色およびデーン彩色に必要な色の種類の最小値を決定した。また、溶接結び目に対して交差交換やデルタ変形などの局所変形が結び目解消操作となることを示した。

研究成果の概要（英文）：A surface-knot is a closed surface embedded in 4-space. We study many properties of surface-knots from the viewpoint of surface-tangles and local moves. We characterize a surface-knot which has a decomposition of trivial surface-tangles, and prove the splittability of a surface-tangle with fabric structure.
On the other hand, we also study many properties of virtual knots and welded knots which present surface-knots of genus one. We characterize a virtual knot whose 3-state number is zero, and determine the minimal number of colors needed for effective Fox or Dehn colorings for a knot or surface-knot. We also prove that the crossing change and delta-move on a welded knot are both an unknotting operation.

研究分野：結び目理論

キーワード：曲面タングル　曲面結び目　溶接結び目　フォックス彩色　デーン彩色

## １．研究開始当初の背景

３次元ユークリッド空間の中の１次元の結び目を古典結び目といい、４次元ユークリッド空間の中の閉曲面を曲面結び目という。古典結び目の研究が活発に行われている一方で、曲面結び目に対する研究はまだ少ない。特に曲面結び目理論におけるタングル的な考察はほとんど行われていなかった。また、トーラスの埋め込みとしての曲面結び目は、古典結び目の拡張である仮想結び目、溶接結び目によって表現されるが、その性質についてもまだあまりよく知られていなかった。

## ２．研究の目的

（１）曲面結び目理論に自明な曲面タングルという概念を導入し、その性質について調べる。特に自明な曲面タングルの和によって得られる曲面結び目がどのようなものか決定する。

（２）溶接結び目の橋指数と、対応する曲面結び目のベース数は一致することが知られている。そこで溶接結び目の橋指数の性質について、古典結び目の場合と比較しながら明らかにする。

（３）カウフマンのステイトモデルから着想を得て導入した仮想結び目のｎステイト数の性質について詳しく調べる。特に３ステイト数について、その値が０になるような仮想結び目の性質を調べる。

（４）フォックスの意味での１１彩色可能な古典結び目、仮想結び目、曲面結び目について、非自明な１１彩色に必要な色の種類の最小値を調べる。特に１１未満の彩色の場合との違いを明らかにする。

（５）仮想結び目の実交点における交差交換は結び目解消操作ではないことが知られている。そこで溶接結び目に対する交差交換を含む様々な局所変形が結び目解消操作になるかどうか調べる。さらに対応する曲面結び目に対しても、タングルの置換である局所変形が導入できるか調べる。

（６）曲面タングルのうちで、縦・横・高さ方向にそれぞれ何枚かの円板をおいたものを考え、それが曲面タングルとして絡んでいるかどうかを調べる。さらにその高次元化を考察する。

（７）種数１の向き付け可能なリボン曲面結び目は溶接結び目により表現される。そこで種数１の向き付け不可能なリボン曲面結び目を１次元で表示する方法について調べる。特に円筒を裏返す曲面タングルを一部分にもつ状態をノードで表し、そのノード付溶接結び目の性質について明らかにする。

（８）これまでｎが奇数の場合にのみ、１次元結び目や曲面結び目のフォックスｎ彩色に対する必要な色の種類の最小値の研究がなされてきた。そこでｎが偶数のときにも拡張し、特にｎが４、６、８の場合にその最小値を決定する。

（９）彩色の概念はフォックス彩色だけでなくデーン彩色が知られており、それらには相互に関係がある。そこで非自明なデーンｎ彩色に用いられる色の種類の最小値を定義し、その性質を明らかにする。特にデーン５彩色について性質を調べる。

（１０）非自明なフォックス３彩色は常に３色すべてを必要とするため、それ以上の性質は調べられていなかった。そこで３彩色に適当な条件を与えることで性質にどのような制限がつくかを調べる。

## ３．研究の方法

（１）４次元ボール内に埋め込まれたいくつかの３次元１ハンドルから得られるアニュラスを成分にもつタングルを自明な曲面タングルとして定義し、自明な曲面タングルを２つ貼り合わせて得られる曲面結び目がどのようなものになるかを、自明な古典絡み目のモーション群を利用して調べる。また、種数１の向き付け可能な曲面結び目が自明な曲面タングル分解をもつかどうかを、溶接結び目による表示を用いて調べる。

（２）古典結び目に対する橋指数の定義は、射影図上の上橋の本数の最小値とするものと、方向ベクトルに関する極大点の個数の最小値とするものの２通りある。また、古典結び目の拡張のひとつである仮想結び目に対してはこれらの２通りの定義が一般には一致しないことが知られている。これらの事実をもとに、古典結び目のもうひとつの拡張である溶接結び目に対して橋指数の２通りの定義が一致するかどうかを調べる。さらにその結果を対応する曲面結び目に応用する。

（３）仮想結び目の射影図Ｄに対し、すべての実交点を平滑化することで得られるステイトがｎ個の円周からなるときｎステイトといい、Ｄに付随するｎステイトの個数を sn(D) と定める。この研究ではｓ３（Ｄ）＝０をみたす射影図Ｄをガウス図式を用いて特徴付けする。さらに仮想結び目Ｋに対してＫのすべての射影図にわたる sn（D）の最小値を sn（K）とかきＫのｎステイト数と定める。宮澤多項式、±１捻れ数、上下結び目群を用いて ｓ３（K）＝０となる仮想結び目 K の特徴付けを行う。

（4）古典結び目や曲面結び目に対する非自明なフォックス１１彩色に用いられる色の種類の最小値は５または６であることが知られている。１１未満の場合のタングルを用いた局所変形の手法を１１の場合に応用することで、その最小値が５であることを証明する。さらに１１未満の場合と異なり，最小値を与える５色の集合の候補は２種類あり、両方とも実現できるかどうかを調べる。

（5）実交点における交差交換は、古典結び目に対しては結び目解消操作であるが仮想結び目に対しては一般には違う。そこで溶接結び目に対して交差交換が結び目解消操作になることを、ガウス図式におけるコードの変形を用いて証明する。この結果から、古典結び目に対する鈴木の標準形と同様なものが溶接結び目に対しても導入できることを射影図を用いて示す。さらにデルタ変形やシャープ変形といった局所変形も溶接結び目に対して局所変形になることを、古典結び目に対する証明を基本にして示す。その応用として、古典空間グラフの内在問題と同様な結果が曲面結び目に対しても得られるかどうかを、鈴木の標準形に対応する曲面結び目の射影図の形を利用することで調べる。

（6）縦糸と横糸からなる２次元の布のタングルの概念を、曲面タングルに導入する。すなわち３次元立方体の中に、各面と平行な正方形の面を何枚かずつ埋め込んだものを考え、それを射影図としてもつような曲面タングルをとる。この３次元の布タングルから、２重点における上下の情報を用いて有向３部グラフを構成する。３重点における上下の情報により３部グラフは長さ３のサイクルをもたないことを示し、それを用いて任意の３次元の布タングルは常に分離的であることを示す。さらにこの手法を一般化し、高次元の場合の布タングルが分離的であるかどうか調べる。

（7）溶接結び目図式上にいくつかの点を指定したものを考える。この点をノードとよぶ。ノード付の溶接結び目図式に対して、種数１の曲面結び目が対応する。特にノードの個数が偶数ならば向き付け可能、奇数ならば向き付け不可能な曲面結び目となる。ノード付溶接結び目の基本変形を導入し、ノードの動きを円筒上で考察することにより、変形の過程においてノードは高々２個で十分であることを示す。特に向き付け不可能な曲面結び目の場合ノードは常に１個とできることが分かる。また、ノード付溶接結び目と、それに対応する曲面結び目の結び目群および結び目カンドルが一致することを、ノードをもたない場合と同様な手法で示せないか調べる。

（8）古典結び目や曲面結び目に対するフォックスｎ彩色に用いられる色の種類の最小値を考えるとき、効果的ｎ彩色に限定することが本質的であることが知られている。n が偶数である場合でも、タングルを用いた局所変形を応用することにより、その最小値が決定できないかを調べる。特に４彩色、６彩色、８彩色の場合に、具体的に結び目図式を変形することにより、その最小値を決定する。

（9）結び目に対する彩色は、その結び目群の二面体群へのある表現とみなすことができる。また、結び目群の表示としてビルディンガー表示とデーン表示が知られており、前者はフォックス彩色を与える。後者が与える彩色をデーン彩色という。これは結び目の射影図の平面における補領域に対する彩色とみなすことができる。この観点から彩色に必要な色の種類の最小値の性質を調べ、特にデーン５彩色のときに具体的に射影図を変形することで最小値が決定できるかどうか調べる。

（１０）非自明に３彩色された古典結び目の射影図Ｄが、ある特定の色に関してその色が付けられた弧が一本のみであるとき、その結び目は三葉結び目を素分解の成分としてもつかどうかを調べる。具体的には、射影図 D を２次元球面上で考え，その弧の近傍を E、その補領域を F とし、D を D∩E と D∩F に分解してそれぞれのタングルがどのような性質をもつか調べる。D∩F 内の交点をすべて適切に平滑化して考えると、本質的に D∩F 内の弧は互いに平行となる。次にＤから問題の弧を取り除いて得られるシータグラフに着目することにより、D が表す結び目の形を調べることができる。

４．研究成果

（1）４次元ボール内の３次元１ハンドルから得られる自明な曲面タングルについて、ふたつの自明な曲面タングルから得られる種数１の曲面結び目は常にリボンとよばれる性質をもつことを示した。また逆に、任意の種数１のリボン曲面結び目に対して、適当な次数の自明な曲面タングル分解をもつことも示せた。その証明には、自明な古典絡み目のモーション群の生成元と曲面結び目の射影図の対応、溶接結び目による表示などを用いる。このことから、リボンでない曲面結び目に対するタングル分解を考えるためには、非自明な曲面タングルを導入する必要があることが分かる。

（2）溶接結び目Ｋに対して、その図式における上道の本数の最小値を b1(K)とし、平面内の方向ベクトルに関する極大点の個数の最小値を b2(K)とする。このとき任意の溶接結び目 K に対して b1(K)=b2(K)が成り立つことを示した。仮想結び目に対してはこのふたつの量は一致しないことが知られているこ

とと比較すると大きな差異があることが分かる。一方で、この結果の曲面結び目における応用は次のようなものである。すなわち種数１のリボン曲面結び目Ｋはいくつかの球面を１ハンドルによって手術することに得られるが、そのときの球面の個数の最小値（ベース数とよばれる）と、Ｋ を自明な１次元絡み目のモーションの軌跡を閉じた形で表したときの絡み目の成分数の最小値が一致する。

（3）Ｄ を溶接結び目図式とし、Ｇ をそのガウス図式とする。このときＤの３ステイト数ｓ３（Ｄ）が０ならば、Ｇ の任意のコードは他の高々２本のコードとのみ交わることが示せた。これにより、溶接結び目Ｋの３ステイト数ｓ３（Ｋ）が０となるならば、次のいずれかが成り立つ。「Ｋの宮澤多項式のｘ１の２乗の係数が０でない」または「Ｋ の１捩じれ数または−１捻れ数が０でない」または「Ｋの上方結び目群と下方結び目群が同型でない」または「Ｋ の上方結び目群と下方結び目群がともに無限巡回群と同型になる」。その応用として任意の古典結び目Ｋに対してその３ステイト数は常に正であることが分かる。２ステイト数が０となる結び目は自明なものに限ることとと比較すると、大きな差異があることが分かった。

（4）任意の１１彩色可能な古典結び目および曲面結び目は、必ず５色で塗り分けることのできる射影図をもつことが示せた。パレットグラフの議論を用いると、１１彩色の場合、その５色の選び方は本質的に２通りあることが知られていたが、今回の証明では、そのいずれの色の集合も実現可能であることまで示した。これまでの１１未満の場合の研究では最小集合がつねに一意的であったが、この研究により、一般には複数の最小集合の候補の場合にも下限を実現する図式が存在する可能性が出てきた。

（5）仮想結び目に対して交差交換は結び目解消操作ではないので、それ以外のデルタ変形やシャープ変形なども結び目解消操作ではない。この研究ではまず、溶接結び目に対する交差交換をガウス図式を通して考えることにより、任意の溶接結び目に対して交差交換が結び目解消操作であることを示すことができた。これを小さなメリディアン円周とバンドで表示する手法に応用すると、溶接結び目は古典結び目同様に鈴木の標準形をもつことが分かる。さらにこの形を利用して、デルタ変形とシャープ変形が溶接結び目の結び目解消操作になることが示せる。その応用として、シータ球面のリボン内在定理の簡易な別証明が与えられる他に、球面とトーラスを内在的に含む２次元胞体のリボン内在問題を肯定的に解決することができた。

（6）３次元立方体の中に、各面と平行な正方形を埋め込んで、その２重点曲線に交差情報をいれたものは、曲面タングルを表す。このような「３次元布」に対して、各正方形を頂点とする３部完全グラフを対応させる。ただし上下の情報により辺は向き付けられる。３重点の周りでは上中下とラベル付けられるので、長さ３のサイクルはないこと二注意して、グラフ理論の議論を用いることにより、任意の３次元布は分離的であることを示した。さらに一般にｎ+１次元立方体にｎ次元の糸で編んだ高次元布を考察すると、ｎ>1 であれば常に分離的であることが証明できた。

（7）溶接結び目図式に対して、その上にいくつかの点（ノードとよぶ）をおいたノード付図式Ｄを考える。このような図式に対して種数１の（向き付け可能・不可能を問わない）リボン曲面結び目を対応することができる。特にノードにはチューブを反転させる曲面タングルを対応させる。この研究ではまず、Ｄ に対するどのような変形が対応する曲面結び目のタイプを変えないかを考察した。その中には隣り合うノードのペアの生成と消滅も含まれる。このような変形によって生成されるノード付図式の同値類を考えると、その結び目群や結び目カンドルは、対応する曲面結び目のそれらと一致することが分かる。任意のノード付図式は高々１個のノードをもつものと同値になる。そこで次の研究として、それらをつなぐ基本変形の途中にどれくらいノードを増やす必要があるかを考えた。するとノードをもたないふたつの図式に対しては変形の過程でも鏡像を取りさえすればノードを増やす必要がないこと、またノードをちょうど１つだけもつふたつの図式に対しては変形の過程でつねにノード１個のままで動かせることが分かった。

（8）ｎが偶数の場合には、フォックスｎ彩色は２成分以上の絡み目に対して意味をもつ。この研究ではｎが４、６、８の場合に効果的フォックスｎ彩色に用いられる色の種類の最小値がそれぞれ４、４、５であることを示した。これまでの研究ではｎが奇数の場合を行っていたが、そこで用いられた局所変形の手法と、偶数独自の性質を利用した。一方でこれまでに知られていた下限は３、４、５であったので、特にｎが２のベキのときにはその下からの評価は等号が成立していない。これに関する精密化が今後の課題となる。

（9）結び目の射影図に対するデーンｎ彩色とは、各補領域をｎ彩色で塗り分け、各交点の周りで彩色条件をみたすものである。理論的にはフォックスｎ彩色の集合と１対１に対応するが、デーン彩色についてはこれまでほとんど研究が行われてこなかった。今回は、フォックス彩色に対する色の種類の最小値の研究を元にして、同様な概念をデーン彩色

に対しても導入し、その性質を調べる研究を行った。特にデーン５彩色に必要な色の種類は４以上であること、またちょうど４色で塗り分けることのできる射影図が存在することを証明した。一見するとフォックスの場合と同様な結果であるが、局所変形を用いた証明の手法は全く別ものである。

（１０）一般に n>3 のとき、フォックス n 彩色可能な結び目は、高々n-1 種類の色を用いて彩色できる射影図をもつが、n=3 の場合だけは状況が異なる。すなわち任意の３彩色は３種類の色すべてを用いる必要がある。この研究ではそれぞれの色が何回ずつ用いられるかに注目し、特に１回しか用いられない色が存在するならば、その結び目を素分解したときに三葉結び目を因子としてもつことを示した。したがって、三葉結目以外の３彩色可能な結び目に対しては、任意の３彩色においてどの色も２回以上用いられていることが分かる。この場合さらに、ちょうど２回用いられるような結び目は素な結び目に限定しても無限個存在することも分かった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　9 件）

[1] T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh, 11-colord knot diagram with five colors, to appear in J. Knot Theory Ramifications, 査読有.

[2] S. Satoh, The length of a 3-cocycle of the 4-dihedal quandle, to appear in Algebra. Geom. Topol.査読有.

[3] Y. Nakanishi and S. Satoh, Two definitions of the bridge index of a welded knot, Topology Appl. 196 (2015), 846-851, 査読有.

[4] Y. Nakanishi, Y. Sakamoto, and S. Satoh, Delta-crossing number for knots, Topology Appl. 196 (2015), 771-776, 査読有.

[5] T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh, On knots with no 3-state, Topology Appl. 196 (2015), 754-770, 査読有.

[6] T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh, On effective 9-colorings for knots, J. Knot Theory Ramifications 23 (2014), 1460059, 15pp, 査読有.

[7] T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh, The state numbers of a virtual knot, J. Knot Theory Ramifications, 23 (2014), 1450016, 27pp, 査読有.

[8] S. Satoh and K. Taniguchi, The writhes of a virtual knot, Fund. Math. 225 (2014), 327-342, 査読有.

[9] K. Oshiro and S. Satoh, 7-colored 2-knot diagram with six colors, Hiroshima Math. J. 44 2014, 63-74, 査読有.

〔学会発表〕（計　15 件）

[1] 佐藤進、曲面結び目の射影図の正則変形、2016 琉球結び目セミナー、2016.2.21、ぶんかテンブス館（沖縄県）

[2] 佐藤進、Dehn colored knot diagrams、The 11th East Asian School of Knots and Related Topics、2016.1.28、大阪市立大学（大阪府）

[3] 佐藤進、Noded knots and ribbon Kb-knots、Friday Seminar on Knot Theory, 2015.10.16、大阪市立大学（大阪府）

[4] 佐藤進、Weaving a fabric in 4-space、拡大 KOOK セミナー、2015.8.18、神戸大学（兵庫県）

[5] 佐藤進、Description of a surface-knot、トポロジーとコンピュータ 2014、2014.11.15、東京大学（東京都）

[6] 佐藤進、Local moves on welded knots、東北結び目セミナー2014、2014.10.18、カレッジプラザ秋田（秋田県）

[7] 佐藤進、交差交換で溶接結び目をほどく、日本数学会秋季総合分科会、2014.9.27、広島大学（広島県）

[8] 佐藤進、Crossing changes unknot a welded knot、A Satellite Conference of Seoul ICM 2014 No. 25: Knots and Low Dimensional Manifolds、2014.8.23、釜山（韓国）

[9] 佐藤進、2 次元結び目のザイフェルト超曲面、2014 琉球結び目セミナー、2014.6.22.、ぶんかテンブス館（沖縄県）

[10] 佐藤進、結び目のステイト数、写像の特異点論及び関連する科学の諸問題、2014.6.5、都城工業恒等専門学校（宮崎県）

[11] 佐藤進、Effective 9-colorings for knots 、 Knots in Washington XXXVII 、2014.1.19、ワシントン D.C.（アメリカ）

[12] 佐藤進、効果的９彩色に必要な色の数、

東北結び目セミナー2013、2013.10.26、東北大学（宮城県）

[13] 佐藤進、本質的フォックス彩色について、2013 琉球結び目セミナー、2013.9.13、ぶんかテンブス館（沖縄県）

[14] 佐藤進、Surface-tangle decomposition of ribbon 2-knots and twist-spun knots、International Conference on Topology and Geometry 2013 - JAMEX VI、2013.9.5、島根大学（島根県）

[15] 佐藤進、On knots with no 3-state、Friday Seminar on Knot Theory、2013.6.14、大阪市立大学（大阪府）

## ６．研究組織

(1)研究代表者

佐藤進（SATOH SHIN）
神戸大学 大学院理学研究科・教授
研究者番号：90345009