

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400091

研究課題名(和文) 三次元多様体の幾何学的手法による研究と展開

研究課題名(英文) Research on 3-manifold using geometric techniques and its development

研究代表者

小林 毅 (Kobayashi, Tsuyoshi)

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：00186751

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では2以上の各 n に対して、距離が n となるようなHeegaard分解が存在することを示したほか、これに関連して距離が n となる結び目の橋分解が存在することを示した。またこの手法を発展させてkeenと呼ばれる新しい概念を定義した上で距離が n のkeenなHeegaard分解が存在することを示したほかいくらかでも橋指数の大きな既約橋分解を持つ結び目が存在する事を示した。また2次元トーラスの相似構造を用いた平坦折り可能な折り紙構成について研究を行いこのような構成方法を定式化したほか、相似構造では構成できない折り紙が存在する事を示した。この他球面曲線の間の距離を定義しこれに関する研究を行った。

研究成果の概要(英文)：In this research, we show that, for each $n > 1$, there exist a Heegaard splitting with distance n , and there exists a bridge splitting with distance n . We introduce a new concept on Heegaard theory, called keen Heegaard splitting, and develop the techniques to show that there are keen Heegaard splittings with distance n . Then we show that there are knots each of which admits infinitely many irreducible bridge spheres with arbitrarily high bridge index. We apply the idea of similarity structure on 2-dimensional torus to construct flat foldable origami. Further we show that there are flat foldable origamis that are not constructed by using similarity structure. In addition to these, we define a distance on the set of isotopy classes of the spherical curves, and give some results on it.

研究分野：幾何学

キーワード：三次元多様体 結び目・絡み目 Heegaard分解 橋分解 折り紙 Hempel距離 ミウラ折り

1. 研究開始当初の背景

この研究は次の2つの背景を有する。

(1) Hempel によって導入された (Topology 40(2001), no.3, 631-657) Heegaard 分解の“距離”の概念は、その三次元多様体の多様な“複雑さ”を測る良い尺度になっていることが様々な研究者によって示されている。その一方、与えられた Heegaard 分解の距離を実際に計算することは非常に難しく、これまでに、一般的な設定でこれに成功したものはない。実際のところ、Hempel を始めとする研究者は、与えられた正数 n に対して、距離が n より大きな Heegaard 分解が存在することを示しているが、これに関しては Thurston の擬アノソフ写像を用いた、一種の、存在定理が示されているだけで、具体的な例の存在との間には、まだ大きなギャップがあることを注意しておく。

一方、Qiu を中心とする中国の三次元多様体の研究グループは、1990 年代に Masur-Minsky によって驚異的な発展がなされた、曲面の曲線複体の距離空間としての幾何学的構造の理論を巧みに使って、Heegaard 分解の距離に関連したいくつかの成果を上げている。特に Ma-Qiu は与えられた境界付きの三次元多様体の Heegaard 分解に対して、その境界を、ハンドル体で閉じる操作を考えると、非常に多くの閉じ方に対して、その Heegaard 分解の距離は保たれることを示している。この結果は Thurston の双曲デーモン手術の理論の精密化・拡張とみなすことができ非常に興味深い。

(2) 1970 年代後半に Thurston によって三次元双曲幾何学が実質的に創始され、その豊かな内容は現在まで多くの分野に影響を与え続けている。Thurston は三次元双曲幾何学を記述するために様々な新しい概念 (測地的ラミネーション、擬アノソフ写像、幾何構造等) を提唱した。これらは本来の目的のために有用であったことはもちろんであるが、たとえば擬アノソフ写像の理論は流体の効率的な混合のために応用できる (Boyland et.al.) 等思いもよらない分野への応用も発見されている。ところで最近建築学を含むいくつかの研究領域で剛体折り紙の研究が進んでいる。人工衛星のソーラーパネルを折りたたむために考案された“ミウラ折り”はこのような剛体折り紙の例になっているが、このミウラ折の変形版と解釈できる (非常に美しい) 平坦折り紙が Lang らによって提出されている。ところでこの Lang の折り紙のパターンは Thurston によって導入された 2 次元トーラスの相似構造の展開写像の像に非常に似ている。申請者は奈良女子大学大学院生入井美紀とこの定式化 (トーラスの相似構造) に基づく一般化されたミウラ折の組織的な構成に取り組んでいた。

2. 研究の目的

この研究の主たる目的は次の二つである

(1) 最近発見された三次元多様体論、特に Heegaard 理論における手法の精密化・展開を行い、さらにそれらの結果を三次元多様体や結び目・絡み目理論における様々な問題に適用し新たな成果を得る。

(2) 低次元トポロジーにおいてこれまでに得られている様々な成果や定式化をより広い幾何的問題に適用する。特に、実生活への関連も意識した成果を得ることも考える。

3. 研究の方法

この研究では「研究の目的」で述べた内容を実現する為に、

- ・この方面、およびそれに関連する海外を含めた研究者との直接対話による情報交換 (情報の具体的な内容については以下の説明を参照のこと)、

- ・ネットワークを通しての情報の収集、研究に関する議論の展開ができるような環境の整備、

- ・研究集会、ネットワークなどでの成果の公開、および書籍等を通しての情報の収集

等の活動を行う。内容的には次のような研究活動を行った。

研究目的(1)に関して：

まず張 井戸と Heegaard 分解の距離の実現問題に取り組む。特に Qiu を中心とする研究グループの手法を参考に内容の精密化に取り組む。さらにこの手法を類似の対象物 (結び目・絡み目の橋分解等) に適用したり、この議論を発展させることにより、興味深い性質を持った Heegaard 分解が存在することを示したりすることを目指す。

上記の研究の応用について取り組んだ。例えば市原 齊藤は結び目の一般化された橋分解のある特別なクラスに対して、いくらかでも大きな距離を与える結び目の橋分解の列を構成している。上記の研究はこのような結果の精密化も与えることが強く期待されるのでそのような研究にも取り組む。またこれ以外にも、一般化された Heegaard 分解や一般化された橋分解などこの理論が適用できる対象が数多くあるのでそれらへの適用についても考察する。

さらに上記の研究で得られた知見を利用して高尾和人、小沢誠、張娟姫と共同で結び目の既約な橋分解の研究を行う。特

にいくらでも橋指数の高い既約な橋分解を持つ結び目が存在するのかどうかを調べる。

研究目的(2)に関して：

「トーラス上の相似構造による一般化されたミウラ折の構成」に関する研究を押し進める。これに関しては（カスプの近傍のホ口球面への射影を通じて）有限体積双曲的三次元多様体の変形空間の理論に結び付く可能性が高いと考えるのでその方向での研究の展開を目指す。

また一般化されたミウラ折りに関する数学的定式化を与え、更にそれをういてそのような構造の変形空間について研究を行う。これに関しては、たとえばそのような空間の境界等関連した興味深い研究対象がたくさん出てくることが期待される。これらを足がかりに更に研究の展開を図る。また考える構造として相似構造以外のもの（等角構造等）も考えることができるが、これから実際のミウラ折りの構成ができるか、といった展開についても取り組む。

上記のような幾何構造による定式化以外の一般化されたミウラ折りの構成方法が存在するのかどうか、また存在するとすればどれくらい多様なものがあるのかを調べる。

この研究で得られた成果については研究集会やネットワークを通して公開してゆくとともに、サイエンスカフェ等のアウトリーチ活動などでも積極的に取り上げ、一般市民への普及も意識するようにする。

4. 研究成果

本研究においては「(1)三次元多様体論、特に Heegaard 理論における手法の精密化・展開」と「(2)低次元トポロジーにおいてこれまでに得られている様々な成果や定式化をより広い幾何的問題に適用」という二つの目的を設定している。これらに関して次のような成果が得られた。

研究目的(1)に関する成果：

Heegaard 分解の距離、3次元多様体の絡み目の橋分解の距離に関して、井戸絢子、張娟姫との共同研究により任意の自然数 n に対して、距離が丁度 n となるような Heegaard 分解、3次元多様体の絡み目の橋分解が存在することを示した。これらの結果をまとめた論文は専門誌 Algebraic and Geometric Topology 及び Topology and its Applications に掲載された。

また上記の研究の延長として次のよう

な成果が得られた：井戸絢子、張娟姫との共同研究で keen な Heegaard 分解と呼ばれる概念を定義した。（ここで、与えられた Heegaard が keen であるとは、その距離を実現するそのハンドル体の本質的円板の組が一意的であることである。）そして任意の $g(>2)$ と任意の自然数 $n(>1)$ に対して、距離がちょうど n となるような種数 g の Heegaard 分解で keen であるようなものが存在することを示した。この結果をまとめた論文は Advanced Studies in Pure Mathematics に投稿、出版が受理された。

また、市原一裕、Yo ' av Rieck と共同で一次元球面上の曲面バンドルのファイバーが strongly acylindrical となるための条件を与えた。この結果をまとめた論文は専門誌 Proc. Amer. Math. Soc. に掲載された。

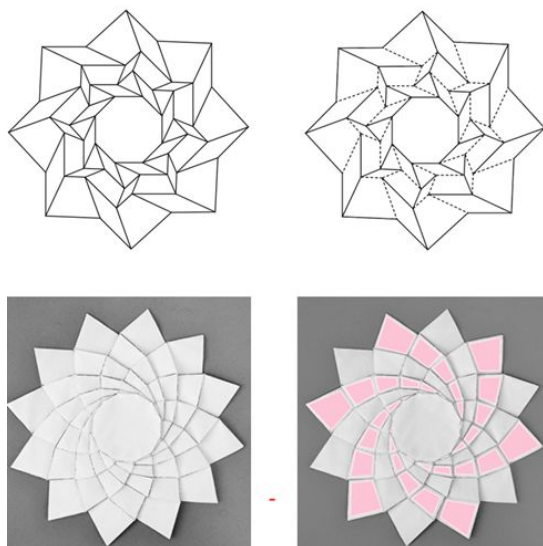
高尾和人、小沢誠、張娟姫と共同でいくらでも橋数の高い unstabilized 橋分解をもつ結び目が存在することを示した。この結果をまとめた論文は専門誌 J. London Math. に掲載された。またこの研究の延長としてこの中で与えられている同じ結び目の異なる既約な橋分解の間の安定化距離を確定することができた。この結果をまとめた論文は現在専門誌に投稿中である。

K. Baker, Y. Rieck と共同で結び目のトンネル数の growth rate と呼ばれる不変量に関して、その値の集合は無限集合になることを示した。この結果をまとめた論文は専門誌 Proc. Amer. Math. Soc. に掲載された。

研究目的(2)に関する成果：

双曲的3次元多様体のカスプ近傍の構造の記述に用いられた「2次元トーラスの相似構造」による平坦折り可能な折り紙の構成について村井絢子と共同研究を行い、3次元多様体内の流れの閉軌道を記述するために導入されたテンプレートにそのような定式化を適用して構成される平面折が存在することを発見した。これらの結果については現在論文にまとめているところで間もなく専門誌に投稿予定である。

また折り紙の数学的取扱にテーマに関して、剛体的な折紙(rigid origami)や折紙タイル張り(:origami tessellation)に関する研究を行った。とくに奈良女子大学大学院生法橋厚美と相似構造等これまで知られている方法では構成できない一般化されたミウラ折りの展開図の構成方法を考案した。この結果についてはこれから論文にまとめ、投稿の予定である。



(本研究の成果である新しい構成方法で得られた折り紙の展開図と実際に折られた折り紙)

球面上の閉曲線に関する研究を伊藤昇, 船越紫, 橋爪恵, 村井紘子と共同して行った. ここでは制限されたライデマイスター移動で互いに移り合う2つの球面曲線の間に, 移り合うために必要となるライデマイスター移動の回数で距離を定義し, 更に有限型不変量と関係するコード図式で定まる関数を用いて, この距離を評価する方法を得た. 現在はこの結果を更に精密化する方向で研究を進めている.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

K.Baker, T.Kobayashi, Y.Rieck, The spectrum of the growth rate of the tunnel number is infinite. Proc. Amer. Math. Soc., 査読有り, 144 (2016), no. 8, 3609-3618. DOI:10.1090/proc/12957

Y.Jang, T.Kobayashi, M.Ozawa, K.Takao, A knot with destabilized bridge spheres of arbitrarily high bridge number, J. London Math., 査読有り, 93(2016), 379-396. DOI:10.1112/jlms/jdw004

A.Ido, Y.Jang, T.Kobayashi, Bridge splittings of links with distance exactly n , Topology and its Appl., 査読有り, 196(2015), 608-617. DOI:10.1016/j.topol.2015.05.028

K.Ichihara, T.Kobayashi, Y.Rieck, Strong cylindricality and the monodromy of bundles, Proc. Amer. Math. Soc., 査読有り, 143(2015), 3169-3176.

DOI:10.1090/S0002-9939-2015-12473-2

T.Kobayashi, Y.Rieck, Hyperbolic volume and Heegaard distance, Comm. Anal. Geom., 査読有り, 22(2014), 247-268.

A.Ido, Y.Jang, T.Kobayashi, (1,1)-bridge splitting with distance exactly n , RIMS Kokyuroku, 査読有り, 1868(2013), 32-37.

[学会発表](計5件)

小林毅, 折り紙の数学的な取り扱いに関する入門, 2016年2月16日, Knotting Nagoya, 名古屋工業大学

小林毅, A construction of flat-foldable origami via similarity structure, 2015年3月28日, Low dimensional topology and number theory VII, 九州大学産学連携イノベーションプラザ

井戸絢子, On the distance of bridge sphere for knots, The 10th East Asian School of Knots and Related Topics, 2015年1月27日, 華東師範大学, 上海(中国).

小沢誠, A knot with destabilized bridge spheres of arbitrarily high bridge number, 2014年8月10日, The Thin Manifold, University of Iowa, U.S.A.

張娟姫, Knots with non-minimal destabilized bridge spheres, 2014年7月22日, The 6th TAPU-KOOK Joint Seminar on Knots and Related Topics, NIMS, Daejeon, Korea.

[その他]

ホームページ

奈良女子大学研究者総覧

<http://koto10.nara-wu.ac.jp/Profiles/6/0000551/profile.html>

小林毅

<http://www.nara-wu.ac.jp/math/personal/tsuyoshi/index-j.htm>

Nwu トポロジーグループ

<https://www.facebook.com/NWUTopologyGroup/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

小林毅 (KOBAYASHI, Tsuyoshi)

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号: 00186751

(4)研究協力者

Baker Kenneth (BAKER, Kenneth)

船越 紫 (FUNAKOSHI, Yukari)

橋爪 惠 (HASHIZUME, Megumi)

井戸 絢子 (IDO, Ayako)

市原 一裕 (ICHIHARA, Kazuhiro)

伊藤 昇 (ITO, Noboru)

張 娟姬 (JANG, Yeonhee)

村井 紘子 (MURAI, Hiroko)

小沢 誠 (OZAWA, Makoto)

高尾 和人 (TAKAO, Kazuto)

Rieck Yo ' av (RIECK, Yo ' av)