

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 26 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400093

研究課題名(和文)3次元多様体の基本群が許容する不変順序に関する研究

研究課題名(英文)Fundamental groups of 3-manifolds and orderings

研究代表者

寺垣内 政一 (TERAGAITO, MASAKAZU)

広島大学・教育学研究科(研究院)・教授

研究者番号：80236984

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：ヘガード・フロアー・ホモロジー理論において、L空間はもっとも単純な3次元多様体である。結び目の巡回分岐被覆空間がいつL空間になるかという問題を考察し、種数1の2橋結び目や交代結び目の場合に肯定的な結論を得た。次に、L空間と関連する擬交代絡み目について、Q多項式やカウフマン多項式といった多項式不変量を用いた簡明な判定法を得た。最後に、結び目群に含まれる共役ねじれ元について、初めて双曲結び目群の無限系列を得ることに成功した。

研究成果の概要(英文)：In Heegaard Floer homology theory, L-spaces are the simplest 3-manifolds. I studied when the cyclic branched covers of knots are L-spaces, and showed that certain covers of genus one 2-bridge knots and alternating knots are L-spaces. Second, I gave simple criteria for quasi-alternating links in terms of Q-polynomials and Kauffman polynomials. Finally, I gave the first infinite family of knots whose knot groups contain generalized torsion elements.

研究分野：トポロジー

キーワード：L空間 擬交代絡み目 共役ねじれ元

## 1. 研究開始当初の背景

2011年にBoyer, Gordon, Watsonによって、L空間予想が提案された。それは、既約な有理ホモロジー球面がL空間であるための必要十分条件が、その基本群が左不変順序を許容しないことを主張する。ヘガード・フロアー・ホモロジー理論の中で導入されたL空間とはいかなる多様体なのか。L空間予想は、その問いに対する代数的で簡明な解答を提起するものといえる。上述の3名は、ザイフェルト多様体という代表的な3次元多様体の族や交代絡み目の2重分岐被覆空間に対して、L空間予想を肯定的に解決した。3次元多様体を構成する代表的な方法は、結び目や絡み目に沿うデーン手術と分岐被覆空間を考えるものである。私は、種数1の2橋結び目に対して、デーン手術の係数がある区間にある場合、得られる3次元多様体の基本群が左不変順序を許容することを証明した。それは、L空間予想の証左となる結果であった。すべての結び目群が左不変順序を許容することは古くから知られていた。一方、両側不変順序を許容するかどうかという問題に対して、ファイバー型結び目に限って、部分的な成果が上がっていたにすぎない。ファイバー型でない結び目群については、このころ全く手の付けられない状況であったといっても言い過ぎではない。

## 2. 研究の目的

(1) 結び目のデーン手術によって得られる3次元多様体や結び目の巡回分岐被覆空間について、それがL空間になるのかどうか、あるいはその基本群が左不変順序を許容するかどうかを調べる。  
(2) 2重分岐被覆空間がL空間になるように導入された擬交代絡み目について考察する。特に、行列式の値が小さい擬交代絡み目の決定を行う。  
(3) ファイバー型でない結び目について、その結び目群がいつ両側不変順序を許容するのか考察する。

## 3. 研究の方法

研究代表者が主たる研究の推進を行った。連携研究者とは日常的に電子メールや電話による意見交換を行うとともに、毎年数回、国内で開催される低次元トポロジー関係の研究集会において会い、議論を行った。海外研究協力者であるAdam Clay氏とは、電子メールによって意見交換を行った。また、不変順序に関する研究に取り組んでいる国内の低次元トポロジー分野の研究者らを訪問したり、国内の研究集会の折に意見を交換するなどして、研究課題に取り組んだ。

## 4. 研究成果

3年間の主な成果を項目ごとにまとめる。

(1) 結び目の巡回分岐被覆空間がいつL空間になるか。種数1の2橋結び目は、ツイストの方向によって2つの族に分けられる。一方については、すべての巡回分岐被覆空間がL空間であることを証明した。他方については、Petersによって2, 3重分岐被覆空間がL空間であることがすでに確認されていた。私は4重分岐被覆空間がL空間であることを証明した。この成果は2013年に島根大学で開催されたトポロジーに関する国際会議で発表し、国際学術雑誌から出版されている(論文番号5)。さらに、種数1の交代結び目に対してその議論を拡張し、常に3重分岐被覆空間がL空間であることを証明した。この成果は国際学術雑誌から出版された(論文番号3)。なお、いずれの分岐被覆空間に対しても、後にGordonとLidmanによって、それらの基本群が左不変順序を許容しないことが示され、L空間予想に反しないことが確認されている。

(2) 多項式不変量による擬交代絡み目の判定について。擬交代絡み目は、2重分岐被覆空間がL空間になる典型的な絡み目として、OzsvathとSzaboによって導入された。古典的な交代絡み目の拡張概念に相当するのだが、図式による定義ではなく、再帰的に定義されるため、与えられた結び目、絡み目が擬交代であるかどうかの判定が困難である。擬交代絡み目ならば、ヘガード・フロアー・ホモロジーやコバノフ・ホモロジーがある性質を満たすことが知られているが、この方向から擬交代絡み目でないことを示すには、そういったホモロジーの計算が必要であり、初等的とはいえない。ところが、2014年6月にQazaqzehとChbiliが擬交代絡み目に対するQ多項式と行列式による明快な必要条件を見つけた。Q多項式は多項式不変量の1つであり、行列式は古典的な不変量である。擬交代絡み目ならば、Q多項式の次数が行列式の値よりも小さくなければならないことを彼らは示したのである。私は彼らの議論を精密化し、(2, n)型トーラス絡み目の場合はQ多項式の次数は行列式の値よりも1だけ小さいが、それ以外の擬交代絡み目のQ多項式の次数は行列式の値よりも少なくとも2は小さいことを証明した。この結果は国際学術雑誌から出版された(論文番号4)。

(3) (2)の研究課題について、Q多項式の2変数化であるカウフマン多項式による評価式を与えた。特に、交代的でない擬交代結び目については、カウフマン多項式のz変数の次数が行列式の値よりも少なくとも3は小さいことを証明した。また、行列式の値が5に等しい擬交代絡み目をすべて決定することができた。それまでに知られていたのは、行列式の値が3以下の場合だけであった。行列式の値が4の場合については残念ながら決定にいたらなかったが、部分的な解決を与えた。これらの結果は国際学術雑誌から出版された(論文番号2)。

(4) 結び目群に含まれる共役ねじれ元について．古典的な結果として，結び目群には有限位数の元は存在しないことが知られている．しかし，トールス結び目群などには，共役ねじれ元の存在が以前から知られていた．共役ねじれ元とは，有限位数である通常のねじれ元を拡張した概念である．単位元でない元に対して，その元の共役元を有限個掛け合わせることで単位元を生み出すことができるような元をいう．また，両側不変順序に対する障害であり，本研究課題と密接に関連する．2014年9月に，Naylor と Rolfsen が，双曲結び目群で共役ねじれ元をもつ例を1つ初めて発見した．結び目表にある5.2とよばれる双曲結び目である．残念ながら，彼らの発見はコンピュータによる計算に基づくものであり，見通しが悪く，一般化は困難に思われた．しかし私は，結び目5.2がツイスト結び目とよばれる無限系列の1つに属することに着目し，すべてのツイスト結び目に対して，ツイストのねじれが正ならばその結び目群に共役ねじれ元は存在しないが，ツイストのねじれが負ならば共役ねじれ元が存在することを証明した．これは，共役ねじれ元をもつような双曲結び目群の無限系列として初めての例である．この成果は論文にまとめ，すでに国際学術雑誌に受理されている(論文番号1)．また，2015年11月に中国で開催されたトポロジーとその応用に関する第1回環太平洋国際会議において招待講演を行った．結び目群に含まれる共役ねじれ元については，その幾何的な意味がまったくわかっていない．私が見つけた例に加えて，今後，あらたな共役ねじれ元を見つけることで，幾何的な意味が明らかになると期待される．

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

- 1 . Masakazu Teragaito, Generalized torsion elements in the knot groups of twist knots, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, 144, no.6, 2016, pp2677-2682, DOI:10.1090/proc/12864
- 2 . Masakazu Teragaito, Quasi-alternating links and Kauffman polynomials, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 査読有, 24, no.7, 2015, pp1550038-1~17, DOI:10.1142/S0218216515500388
- 3 . Masakazu Teragaito, Cyclic branched covers of alternating knots and L-spaces, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 査読有, 52, no.4, 2015, pp1139-1148, DOI:104134/BKMS.2015.52.4.1139
- 4 . Masakazu Teragaito, Quasi-alternating

links and Q-polynomials, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 査読有, 23, no.12, 2014, pp1450068-1~6, DOI:10.1142/S0218216514500680

5 . Masakazu Teragaito, Four-fold cyclic branched covers of genus one two-bridge knots are L-spaces, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 査読有, 20, no.2, 2014, pp391-403, DOI:10.1007/s40590-014-0026-6

6 . Kimihiko Motegi, Masakazu Teragaito, Left-orderable, non-L-space surgeries on knots, Communications in Analysis and Geometry, 査読有, 22, no.3, 2014, pp421-449, DOI:10.4310/CAG.2014.v22.n3.a2

[学会発表](計9件)

1 . 寺垣内 政一, ツイスト結び目の結び目群に含まれる共役ねじれ元, 日本数学会年会, 2016年3月16日, 筑波大学(茨城県・つくば市天王台)

2 . Masakazu Teragaito, Generalized torsion elements in the knot groups of twist knots, The 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, 2015年11月28日, Min Nan Normal University, Zhangzhou, China

3 . 寺垣内 政一, Generalized torsion elements in the knot groups of twist knots, Geometry and Topology of Low-dimensional Manifolds, 2015年10月29日, 奈良女子大学(奈良県・奈良市北魚屋東町)

4 . 寺垣内 政一, 擬交代絡み目とKauffman多項式, 日本数学会秋季総合分科会, 2015年9月13日, 京都産業大学(京都府・京都市北区上賀茂本山)

5 . 寺垣内 政一, Quasi-alternating links and Kauffman polynomials, 拡大KOOKセミナー-2015, 2015年8月20日, 神戸大学(兵庫県・神戸市灘区六甲台町)

6 . 寺垣内 政一, 擬交代絡み目とQ多項式, 日本数学会年会, 2015年3月24日, 明治大学(東京都・千代田区神田駿河台)

7 . 寺垣内 政一, Cyclic branched covers of knots and L-spaces, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2015, 2015年2月23日, 東北学院大学(宮城県・多賀城市中央)

8 . 寺垣内 政一, 2橋結び目の巡回分岐被覆空間とL空間, 日本数学会秋季総合分科会, 2013年9月24日, 愛媛大学(愛媛県・松山市道後樋又)

9 . Masakazu Teragaito, Cyclic branched covers of genus one two-bridge knots and L-spaces, International Conference on Topology and Geometry 2013, 2013年9月3日, 島根大学(島根県・松江市西川津町)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

寺垣内 政一 (TERAGAITO MASAKAZU)  
広島大学・大学院教育学研究科・教授  
研究者番号：80236984

### (3) 連携研究者

合田 洋 (GODA HIROSHI)  
東京農工大学・大学院工学研究院・教授  
研究者番号：60266913