

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400095

研究課題名(和文) トーリックトポロジーの展開

研究課題名(英文) Development of toric topology

研究代表者

枘田 幹也 (Masuda, Mikiya)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00143371

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：トーラス群作用をもつ多様体のトポロジーに関して次の結果を得た。  
2つのBott多様体のコホモロジー環の間に環同型があれば、それらのPontrjagin類を保つことを示した(Choi, 村井との共同研究)。旗多様体の部分多様体であるPeterson多様体, regular nilpotent Hessenberg多様体のコホモロジー環の明示的な表示を与えた(福川 原田, 原田 堀口, 阿部-原田 堀口との共同研究)。トーリック折り紙多様体のコホモロジーを調べた(Ayzenberg, Park, Zengとの共同研究)。トーラス多様体にルート系を導入し対称性を調べた(黒木との共同研究)。

研究成果の概要(英文)：I obtained the following results about the topology of manifolds with torus actions.

We proved that any cohomology ring isomorphism between two Bott manifolds preserves their Pontrjagin classes (Joint work with Choi and Murai). We gave an explicit presentation of the cohomology ring structure of Peterson varieties and regular nilpotent Hessenberg varieties which are subvarieties of flag varieties (joint work with Fukukawa-Harada, Harada-Horiguchi, Abe-Harada-Horiguchi). We studied the cohomology of toric origami manifolds (joint work with Ayzenberg, Park and Zeng). We studied the symmetry of torus manifolds by introducing a root system for a torus manifold (joint work with Kuroki).

研究分野：トポロジー

キーワード：トーラス群 旗多様体 コホモロジー 特性類 ルート系

### 1. 研究開始当初の背景

トーリック多様体論をトポロジーの立場から展開し、トーリックトポロジーという新しい分野の開拓を進めている。これまでトーリック多様体(もっと一般にトーラス多様体)のトポロジーを(多重)扇などを用いて組合せ論の言葉で記述することを主に行ってきた。

### 2. 研究の目的

研究の目的は以下の3点である。

(1) トーリック多様体の微分同相による分類(特にコホモロジー剛性問題). 特にポット塔に対する肯定的解決.

(2) トーリック折り紙多様体のトポロジーの研究. トーリック折り紙多様体は、シンプレクティックトーリック多様体を拡張した概念で、折り紙テンプレートと呼ばれる(ある条件をみたした)凸多面体の集まりで分類されることが Cannas da Silva-Guillemin-Pires により知られている. トーリックシンプレクティック多様体のトポロジーが、対応する凸多面体(モーメント凸多面体)で綺麗に記述されているが、この結果の拡張を目指した.

トーリック折り紙多様体は、 $n$ 次元のコンパクトトーラス作用をもつ  $2n$ 次元閉多様体である. しかし、 $n$ 次元のコンパクトトーラス作用をもつ  $2n$ 次元閉多様体がトーリック折り紙多様体になるとは限らない. トーリック折り紙多様体の特徴づけを目的とした.

(3) 同変シューベルトカリキュラスをトーリックトポロジーの立場から研究し、トーリックトポロジーの枠組みを広げる. 特に、Hessenberg 多様体のトポロジーを、同変のテクニックを用いて調べることを目的とした.

### 3. 研究の方法

コホモロジー剛性問題を一般的に解決することは非常に難しいので、取り扱い易く、しかも意味があるポット塔に対するコホモロジー剛性問題の肯定的解決を目指した. 低い次元の場合、肯定的結果が得られていることもあり、この場合をまず攻略することとした.

Hessenberg 多様体のトポロジーを GKM 理論の観点から調べる.

トーリックトポロジーは色々な分野と交錯する分野である. そのような関連する分野の研究者との研究交流を通して自身の研究を進展させるとともに、勉強会や研究集会を開催して若手研究者の育成を計る.

### 4. 研究成果

トーラス群作用をもつ多様体のトポロジーに関して次の結果を得た.

(1) 2つの Bott 多様体のコホモロジー環の間に環同型があれば、それらの Pontrjagin 類を保つことを示した. これと手術理論の結

果を併せると、コホモロジー環が同型な Bott 多様体は、高々有限個であることが分かる. さらに、ある条件下では、コホモロジー環が同型な Bott 多様体は唯一つであることを示した (Choi, 村井との共同研究).

(2) トーリック折り紙多様体のコホモロジーを調べた (Ayzenberg, Park, Zeng との共同研究). トーリック折り紙多様体のトーラス群による軌道空間は角付き多様体になり面が定義できるが、その真の面がすべて非輪状である場合に、トーリック折り紙多様体のベッチ数を軌道空間の言葉で記述した. 環構造に関しては、具体的な記述を得た. この記述はほぼ完全なものであるが、一部不明なところが残っている.

トーリック折り紙多様体の特徴づけ問題に関しては、次の結果を得た. まず、単連結な実 4次元擬トーリック多様体はすべて折り紙多様体であることを示した (Park との共同研究). これに反して、実 6次元擬トーリック多様体でトーリック折り紙多様体にならないものが無限に沢山あることを示した (Ayzenberg, Park, Zeng との共同研究).

(3) 旗多様体の部分多様体である Peterson 多様体のコホモロジー環の具体的表示を与えた (福川 - 原田との共同研究). ここで扱ったのは A型の Peterson 多様体であったが、Peterson 多様体は任意のリー型に対して定義されている. そこで、一般のリー型の Peterson variety のコホモロジー環の具体的表示を与えた. この表示にはカルタン整数が現れたのは、少なからず驚きであった (原田 - 堀口との共同研究). 以上の結果を踏まえて、Peterson variety を族として含む regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環の具体的表示を与える問題に取り組み、A型の場合に成功した (阿部 - 原田 堀口との共同研究). さらに、regular nilpotent Hessenberg variety のコホモロジー環が、regular semisimple Hessenberg variety のコホモロジー環の対称群不変な部分環と同型であることを示した. この結果は、Shareshian-Wachs 予想の部分的肯定的解決をも意味し、頗る興味深い.

(4) トーラス多様体のトーラス群作用は、しばしばより大きなコンパクトリー群  $G$  作用に拡張する. トーラス多様体  $M$  に対してルート系  $R(M)$  を定義し、拡張  $G$  作用の  $G$  のルート系は、 $R(M)$  の部分ルート系になることを示した (黒木との共同研究).

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件すべて査読有)

A. Ayzenberg, S. Park, M. Masuda and H. Zeng, Cohomology of toric origami manifolds with proper acyclic faces, J.

Symplectic Geometry (to appear).

S. Kuroki, Root systems and symmetries of torus manifolds, Transformation Groups (to appear).

S. Kuroki, M. Masuda and L. Yu, Small covers, infra-solvmanifolds and curvature. Forum Math. 27 (2015), 2981-3004.

S. Choi, M. Masuda and S. Murai, Invariance of Pontrjagin classes for Bott manifolds. Algebraic and Geometric Topology 15 (2015), 965-986.

M. Harada, T. Horiguchi and M. Masuda, The equivariant cohomology rings of Peterson varieties in all Lie types, Canad. Math. Bull. 58 (2015), 80-90.

A. Ayzenberg, S. Park, M. Masuda and H. Zeng, Toric origami structures on quasitoric manifolds, Proc. Steklov Inst. Math., Vol. 288(1), 2015, pp.10-28.

Y. Fukukawa, M. Harada and M. Masuda, The equivariant cohomology rings of Peterson varieties, J. Math. Soc. Japan, vol. 67, No. 3 (2015), pp. 1147--1159.

M. Masuda and S. Park, Toric origami manifolds and multi-fans, Proc. Steklov Inst. Math. 286 (2014), 308--323.

H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi and M. Masuda, The equivariant cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A: a research announcement, Morfismos, vol. 18, no.2, 2014, pp. 51-65.

〔学会発表〕(計 19 件)

柁田幹也, トーリックトポロジー, 日本数学会「筑波大学(茨城県・つくば市)」, 2016年3月17日

柁田幹也, Cohomology of regular Hessenberg varieties and representations of symmetric groups, 日本数学会「京都産業大学(京都府・京都市)」, 2015年9月15日

Mikiya Masuda, The root systems of torus manifolds, ハバロフスク(ロシア), 2015年9月10日

Mikiya Masuda, Cohomology of regular Hessenberg varieties and representations of symmetric groups, シンガポール(シンガポール), 2015年8月26日

Mikiya Masuda, Cohomology of regular Hessenberg varieties and representations of symmetric groups, Combinatorial Constructions in Topology, レジヤイナ(カナダ), 2015年8月20日

Mikiya Masuda, Topology of torus actions and combinatorics, Glances@Manifolds, low-&-high dimensional, クラコフ(ポーランド), 2015年7月18日

Mikiya Masuda, Cohomology of regular Hessenberg varieties and representations

of symmetric groups, Geometry and Topology: A conference in honor of Martin Bendersky's seventieth birthday and in commemoration of our friend and colleague Sam Gitler, プリンストン(アメリカ), 2015年3月18日~21日.

柁田幹也, Cohomology of regular Hessenberg varieties, 「変換群論フォーラム研究会, 日本特殊陶業市民会館(愛知県・名古屋市)」, 2014年3月8日

Mikiya Masuda, Cohomology of toric origami manifolds, Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications "Skoltech モスクワ(ロシア)", 2015年2月17日

Mikiya Masuda, Cohomology of regular Hessenberg varieties, Jeju Toric meeting, 済州島(韓国), 2014年12月26日

柁田幹也, Cohomology of toric origami manifolds, 「第41回変換群論シンポジウム, 蒲郡市民会館(愛知県・蒲郡市)」, 2014年11月13日

柁田幹也, トーラス多様体と多重扇, 「服部セミナー, 東大数理(東京都・目黒区)」, 2014年6月29日

柁田幹也, Invariance of Pontrjagin classes for Bott manifolds, シンポジウム「不動点定理とその周辺, 奈良女子大(奈良県・奈良市)」, 2014年3月9日

柁田幹也, トーリック多様体のコホモロジー剛性問題, 「第2回杜の都代数幾何学研究集会, 東北大学(宮城県・仙台市)」, 2014年1月9日

Mikiya Masuda, Toric origami manifolds in toric topology, A Conference to Celebrate Sam Gitler's 80th Birthday, メキシコシティ(メキシコ), 2013年9月25日

Mikiya Masuda, Toric origami manifolds in toric topology, Knots, Manifolds and Group Actions, Slubice(ポーランド), 2013年9月13日

柁田幹也, トーリック多様体のコホモロジー剛性問題, 組合せ論と可換代数サマーセミナー, 「下関市生涯学習プラザ(山口県・下関市)」, 2013年8月11日

Mikiya Masuda, Some combinatorics and geometry via toric topology, The Asian Mathematical Conference 2013, 釜山(韓国) 2013年7月1日

Mikiya Masuda, Toric origami manifolds in toric topology, Algebraic Topology and Abelian Functions, モスクワ(ロシア), 2013年6月19日

〔図書〕(計 1 件)

「格子からみえる数学」(柁田幹也, 福川由貴子), 日本評論社, 2013年7月, 1-228.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

栢田 幹也 (MASUDA Mikiya)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00143371

(2) 研究分担者

なし