2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２８ 日現在

機関番号：３４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2017
課題番号：２５４０００９６
研究課題名（和文）ゲージ理論の精密化と4次元トポロジー

研究課題名（英文）Refinement of Gauge Theory and 4-dimensional topology

研究代表者
中村　信裕（Nakamura, Nobuhiro）

大阪医科大学・医学部・講師

研究者番号：１０５１２１７１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：4次元トポロジー・幾何への応用を目指しながら，主にPin(2)モノポール理論を深化・発展させる研究を行った．具体的な成果は以下の通りである．1.Pin(2)モノポール不変量の計算と応用．特に連結和公式と，エキゾティック構造，山辺不変量の計算への応用，2.安定コホモトピー不変量の定式化と具体例の計算．3.境界つき4次元多様体へのPin(2)モノポール理論の適用と局所係数交叉形式への応用．4.実構造を持つ概ケーラー曲面に対する不変量の非消滅定理．

研究成果の概要（英文）：We have mainly investigated and developed the Pin(2)-monopole theory for applications to 4-dimensional topology and geometry. The results of this study are as follows: 1. Computations and applications of the Pin(2)-monopole invariants. In particular, the connected-sum formula, applications to exotic structures and computations of Yamabe invariants. 2.Formulation and computations of stable cohomotopy invariants. 3.Pin(2)-moopole theory on 4-manifolds with boundary and applications to intersection forms with local coefficients. 4.Nonvanishing theorem for almost Kaehler surfaces with real structures.

研究分野：幾何学

キーワード：ゲージ理論　トポロジー　4次元多様体　山辺不変量

１．研究開始当初の背景

ゲージ理論の 4 次元(あるいは 3 次元)多様体のトポロジーや幾何への応用は, 80 年代初めの Donaldson による 4 次元多様体の交叉形式への応用以来 30 年以上の歴史を持つ. 当初は Donaldson らによる SU(2)あるいは SO(3) Yang-Mills 理論が低次元トポロジーや幾何に応用されるほぼ唯一のゲージ理論であったが, 1994 年に Seiberg-Witten 方程式が登場してからは応用の中心は Seiberg-Witten 理論へとシフトした. さらに今世紀に入ると Ozsvath-Szabo により Heegaard Floer 理論が建設され, 比較的計算しやすいなどの理由からこの理論が低次元トポロジーと幾何の研究手法の大きな流れとなっていった. しかしながら, このような Heegaard Floer 理論の流行により従来のゲージ理論が廃れてしまったかと言うと全くそうではなく, 90 年代の終わりには Seiberg-Witten 不変量の高次版といえる安定コホモトピー不変量が Bauer-Furuta によって定義された. さらに Monopole Floer ホモロジーの安定ホモトピー版が Manolescu によって構成され, 境界付き 4 次元多様体の相対 Seiberg-Witten 不変量の安定コホモトピー不変量が定義された. 別の流れとして, 群作用がある状況, あるいは多様体の族といった, より発展的な状況に対するゲージ理論の考察・応用の流れがあり, 筆者も群作用付き, あるいは族の Seiberg-Witten 理論を研究し, いくつかの応用を得ている. さらに 2008 年頃に, 古田幹雄氏によって局所係数付き Seiberg-Witten 方程式というべき Pin(2)モノポール方程式(の枠組み)が構成され, 2010 年頃筆者によってこの方程式は局所係数交叉形式の制約を得ることに応用された.

２．研究の目的

本研究の目的は, 上に述べたゲージ理論の発展の歴史を踏まえ, ゲージ理論をさらに精密化することにより, 4 次元のトポロジーや幾何への進んだ応用を得ることである. ここでゲージ理論の精密化として念頭にあるのは, 一つはホモトピー的ゲージ理論である Bauer-Furuta 理論(そして Manolescu 理論), もう一つは局所系に沿ってねじれたゲージ理論である Pin(2)モノポール理論, そしてさらにこれら二つの組み合わせである. これら新しい理論の応用の可能性を追求することにより 4 次元多様体への新たな知見を得, 理解を深化させることが目的である. 具体的に何をターゲットとし, 何を得たかは研究成果の項目で示される.

３．研究の方法

研究の方法としては, 既存の Seiberg-Witten 理論のアナロジーから出発し, 新たな現象の発見に至ると言う道筋が多く取られ, かつ有効であった.

また山辺不変量の研究に際しては, 専門家の協力が必要であったので, 石田政司氏, 松尾信一郎氏の協力を仰いだ.

４．研究成果

(1)Pin(2)モノポール不変量の定式化, 連結和公式とその応用. Pin(2)モノポール方程式を用いて 4 次元多様体に対する微分位相不変量を定義し, その性質を調べた. 特に連結和公式を示した. この不変量は Seiberg-Witten 不変量(以下 SW 不変量)の変種とみなせるものであるが, Pin(2)モノポール方程式が局所系に沿ってねじれていることから, SW 不変量が 0 でも Pin(2)モノポール不変量は非自明である, あるいはその逆ということが起こる. 一般にゲージ理論の不変量(Donaldson 不変量, SW 不変量等)は blow up など例外的な状況を除いて連結和に対して 0 になってしまうという「こわれやすい」性質を持つが, 局所係数によりねじれていることから既存の不変量が 0 となる連結和の上でも Pin(2)モノポール不変量は非自明になることがあることがわかった. このことの応用として, 特に, 楕円曲面に, 円周と 3 次元多様体の直積や 2 次元球面と種数が 1 以上のリーマン面の直積を何個連結和しても exotic な微分構造が入ることがわかった. 別の言葉で言うなら, 楕円曲面の exotic な構造は上述の多様体との連結和を取ることでは崩れない. 以上の結果は論文②にまとめられ, 既に出版されている.

(2)Pin(2)モノポール方程式を用いた山辺不変量の計算. (石田政司氏, 松尾信一郎氏との共同研究) (1)の不変量のもう一つの応用として, ケーラー曲面に円周と 3 次元多様体の直積や 2 次元球面と種数が 1 以上のリーマン面の直積を何個連結和しても山辺不変量の値が変わらないと言う結果を得た. 一般に山辺不変量の計算は難しく, これらの結果は山辺不変量の研究において重要であると思われる. また Einstein 計量や Ricci 流の存在に対する新しい障害もみつかった. 以上の結果は論文①にまとめられ, 既に出版されている.

(3)3 次元多様体の Pin(2)モノポール不変量の基礎研究. 円周と 3 次元多様体の直積の上の Pin(2)モノポール方程式を円周方向に不変な部分に制限することにより 3 次元多様体に対する Pin(2)モノポール方程式が得られる. この 3 次元の Pin(2)モノポール方程式を用いて, 3 次元多様体に対する(微分)位相不変量を定義することができる. この不変量の基本的な性質を調べた. 特に, 連結和公式, 結び目に沿った手術公式を得た. とりわけ興味深いこととして, 結び目 K が 3 次元多様体の中で null homotopic のとき, K に沿って手術をしても不変量の値が変わらないとい

う現象を見出した．以上の結果は研究集会⑥で発表した．今後の課題は，この不変量の正体を突き止めることである．3 次元多様体の不変量なのでより位相的・組み合わせ的な記述が可能であると思われ，既存の不変量との関係が明らかになることを期待している．

(4)族の Pin(2)モノポール方程式と計量の空間のトポロジー．(石田政司氏との共同研究) Ruberman は引用文献①において，計量の族に対する Seiberg-Witten 方程式の解のモジュライ空間を考察し，偶数個の複素射影空間と十分多くの逆むきの複素射影空間の連結和の正スカラー曲率の空間が無限個の連結成分を持つことを示している．Pin(2)モノポール方程式を用いて Ruberman の結果の類似物を得た．具体的には，上述の両方の向きの複素射影空間の連結和にさらに円周と 3 次元多様体の直積を連結和するともはや正スカラー曲率計量を許容するかは不明になるが，十分小さな正の定数 e に対してスカラー曲率がいたるところ -e 以上となるような計量は存在する．族の Pin(2)モノポールのモジュライ空間を用いて，スカラー曲率が -e 以上であるような計量の空間が不連結であることを証明した．一般に多様体の計量の空間のトポロジーは例外的な状況を除いてほとんど何もわかっていない状況であるので，このような結果は重要であると思われる．

(5)Pin(2)モノポール方程式の Bauer-Furuta 理論，安定コホモトピー不変量．Seiberg-Witten 不変量の高次版である安定コホモトピー不変量が Bauer-Furuta(引用文献②)によって定式化され，連結和公式が Bauer(①)によって証明されている．Pin(2)モノポール方程式についてその Bauer-Furuta 理論を考察，Pin(2)モノポール版の安定コホモトピー不変量を定義し，具体例についてその値を計算した．特に K3 曲面と Enriques 曲面の連結和の不変量が非自明であることがわかった．応用として，この連結和に exotic な微分構造が入ること，この連結和とその blow up の山辺不変量が 0 であることが新たにわかった．以上の結果はいくつかの研究集会(③④)で発表された．

(6)Pin(2)モノポール方程式の境界付き 4 次元多様体の局所係数交叉形式への応用．Donaldson による定値交叉形式を持つ閉 4 次元多様体についての対角化定理は Froyshov によって境界付き 4 次元多様体へと拡張されている．より詳しくいうと，このとき導入された homology cobordism 不変量である Froyshov 不変量によって定値交叉形式の characteristic vector のノルムが評価される．整係数ホモロジー3 球面を境界として持つ 4 次元多様体の上 Pin(2)モノポール方程式をで考察することにより，局所係数定値交叉形式に対して同様の結果を得た．この結果はいくつかの研究集会(②③)で発表された．

(7)実構造と Pin(2)モノポール方程式．(概)ケーラー曲面に対して，(概)複素構造から定まる標準的 Spin-c 構造があり，その構造に対しては SW 不変量が非自明であることが Taubes らによって示されている．これのアナロジーとして，(概) ケーラー曲面 X に自由な anti-holomorphic involution があるとき，X をこの involution で割った多様体の Pin(2)モノポール不変量が非自明であることを証明した．また実ケーラー局面の商の場合に小林・ヒッチン対応の類似物を証明し，実構造を持つ楕円曲面の商の不変量を具体的に計算した．これまでの Pin(2)モノポール不変量の計算は既存の SW 不変量の計算に基づくことがほとんどであったが，これらの計算は Pin(2)モノポール理論独自の自然な計算例を与えるものと考えられる．以上の結果は論文にまとめられ，現在雑誌に投稿中である．プレプリントは **math arXiv: 1803.11339 に上げられている．**

<引用文献>

① Bauer, Stefan. "A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants: II." ***Inventiones mathematicae*** 155.1 (2004): 21-40.

② Bauer, Stefan, and Mikio Furuta. "A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants: I." ***Inventiones mathematicae*** 155.1 (2004): 1-19.

③ Ruberman, Daniel. "Positive scalar curvature, diffeomorphisms and the Seiberg-Witten invariants." Geometry & Topology 5.2 (2002): 895-924.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① Masashi Ishida, Shinichiroh Matsuo and Nobuhiro Nakamura, Yamabe invariants and the Pin(2)-monopole equations, Mathematical Research Letters, 査読有, 23 巻, 2016, 1049-1069 DOI: http://dx.doi.org/10.4310/MRL.2016.v23.n4.a4

② Nobuhiro Nakamura, Pin(2)-monopole invariants, Journal of Differential Geometry, 査読有, 101 巻, 2015, 507-549

https://projecteuclid.org/euclid.jdg/1445518922

③ Nobuhiro Nakamura, Mod p equality theorem for Seiberg-Wtten equations under Zp-actions, Tokyo.J.Math. 査読有, 37 巻, 2014, 21-29 https://projecteuclid.org/euclid.tjm/1406552428

〔学会発表〕（計 7 件）

① 中村 信裕, Real structure and the Pin(2)-monopole equations, Gauge theory in Fukuoka, 2018
② 中村 信裕, Recent development of Seiberg-Witten Floer theory, RIMS 研究集会「Casson 不変量に関わる 3 次元多様体の不変量」, 2017
③ 中村 信裕, Pin(2)-monopole theory, Geometric Analysis and Geometric Topology 2016, 2016
④ 中村 信裕, 山辺不変量と Pin(2)モノポール方程式, 第 63 回幾何学シンポジウム, 2016
⑤ 中村 信裕, Pin(2)同変 Seiberg-Witten Floer K 理論と境界付き 4 次元スピン多様体の交叉形式, 微分トポロジー16, 2016
⑥ 中村 信裕, 3 次元多様体の Pin(2)モノポール不変量, 微分トポロジー15, 2015
⑦ 中村 信裕, Pin(2)モノポール方程式と山辺不変量, 研究集会「4 次元トポロジー」, 2014

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等
https://www.osaka-med.ac.jp/deps/mat/nakamura/index.html

６．研究組織

(1)研究代表者
中村 信裕（NAKAMURA, Nobuhiro）
大阪医科大学・医学部・講師
研究者番号：10512171

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
該当なし

(4)研究協力者
石田 政司（ISHIDA, Masashi）
東北大学・大学院理学研究科・教授

松尾 信一郎(MATSUO, Shinichiroh)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授