

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 5 日現在

機関番号：32619

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400097

研究課題名(和文)対消滅スペクトル系列と分類空間のコホモロジー

研究課題名(英文)Annihilation in spectral sequences and cohomology of classifying spaces

研究代表者

亀子 正喜(Kameko, Masaki)

芝浦工業大学・システム理工学部・教授

研究者番号：50270343

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：群 G に対して分類空間と呼ばれる空間が存在する。分類空間は位相空間であり群のコホモロジーを代数トポロジーの道具を用いて研究することができる。代数トポロジーで利用可能な道具の中には各種のスペクトル系列がある。この研究課題では分類空間 BG のコホモロジーをスペクトル系列を用いて計算しようと試みた。最も上手く行く場合はスペクトル系列は E_2 レベルで退化する。しかし、いくつかの群に対してはスペクトル系列は E_2 レベルで退化しない。この研究課題ではそのような場合を取り扱った。

研究成果の概要(英文)：For a group G , there exists a space BG called the classifying space. The classifying space is a topological space and so one may study the group cohomology using tools in algebraic topology. Among tools available in algebraic topology are various spectral sequences. In our research project, we attempted to compute the cohomology of the classifying space BG using spectral sequences. In most successful cases, the spectral sequence collapses at the E_2 level. However, for some groups, the spectral sequence does not collapse at the E_2 -level. In this research project, we dealt with such cases.

研究分野：代数トポロジー

キーワード：分類空間 コホモロジー スペクトル系列 ループ空間 チャウ環 サイクル写像 有限シュバレー群
トポロジー

1. 研究開始当初の背景

群のコホモロジーの研究は古くからの数学のテーマであり代数の一分野であると同時に幾何やトポロジーの交錯する分野でもある。

p を素数とする。空間 X の自由ループ空間は恒等写像のホモトピー固定点集合とみなすことができる。空間 X としてリー群 G の分類空間 BG を取ればループ群の分類空間になる。さらにリー群 G から得られる有限シュバレー群の分類空間の $\text{mod } p$ コホモロジーは BG の幾何学的フロベニウス写像のホモトピー固定点集合のそれと一致する。このことからリー群の分類空間のコホモロジー、その自由ループ空間のコホモロジーと有限シュバレー群のコホモロジーを統一的に理解できるかもしれないと考えられていた。また、線形代数群の分類空間のチャウ環の研究やモチービックコホモロジーの研究を通して分類空間のコホモロジーをこれまでとはまた違う視点から捉えられるのではないかと期待もあった。

連結リー群 G の整数係数ホモロジー群がねじれ元を持たない場合には分類空間 BG のコホモロジー環は偶数次元の元のみから生成される多項式環になる。この場合は計算も比較的容易であり、それなりに理解が進んでいるが、ねじれ元がある場合の連結リー群に対しては計算は困難であったし理解も不十分であると研究代表者は考えていた。

2. 研究の目的

上の状況を踏まえて、当初の「研究目的」は「リー群 G の分類空間 BG とそれに関連したホモトピー固定点集合のコホモロジーの計算および関連する位相空間のコホモロジーの間の関係を解き明かすこと」としていたが、特に整数係数ホモロジー群がねじれをもつような連結リー群 G に対してその分類空間 BG と分類空間の自由ループ空間 LBG 、連結リー群 G に随伴する有限シュバレー群 $G(F, q)$ のコホモロジーを計算すること、それらの間の関係を調べることであった。

3. 研究の方法

上にあげた位相空間のコホモロジーの計算のための主要な道具としてスペクトル系列がある。整数係数ホモロジー群がねじれ元をもたない連結リー群 G に対してはスペクトル系列は E_2 レベルで退化しておりその計算はそれほど困難ではない。それに対して整数係数ホモロジー群がねじれ元を持つ場合にはスペクトル系列は E_2 レベルでは退化せず非自明な微分の計算が必要になる。しかしながらスペクトル系列はある種のブラ

ックボックスであり、その内部構造を探ること、とくに微分の計算は往往にして困難である。

しかしながら、スペクトル系列の非自明な微分はコホモロジーの生成元間の関係式を表しており、これを困難として捉えず、これを積極的に利用してスペクトル系列の計算を進めること、非自明な微分の意味を考察することを試みる。

4. 研究成果

(1) リー群で整数係数ホモロジー群が 2-ねじれをもつスピン群に対して分類空間の自由ループ空間のコホモロジーの研究を行った。スピン群の分類空間の $\text{mod } 2$ コホモロジーは Quillen により計算されている。しかしながらその分類空間の自由ループ空間のコホモロジーの計算は栗林、三村と西本により $\text{Spin}(10)$ の場合になさっているだけである。スピン群の分類空間のコホモロジーを直接計算することなく適切な空間を考えてそこへのコホモロジーの誘導準同型を用いてその像が一致することを示すことによりスピン群の分類空間の自由ループ空間の $\text{mod } 2$ コホモロジーとスピン群の有限シュバレー群の $\text{mod } 2$ コホモロジーが同型であることを示した。この結果は島根大学での国際研究会で基調講演として発表した。さらにこの結果は査読付き論文 “Cohomology of classifying spaces of loop groups and finite Chevalley groups associated with spin groups” として学術誌 *Topology and its applications* に掲載された。

(2) リー群の分類空間のコホモロジー環の部分環でリー群の複素表現の誘導する準同型の像であるチャーン環から生成されるものはチャーン環と呼ばれている。連結リー群でその整数係数ホモロジー群が p -ねじれ元を持つ場合に連結リー群の分類空間とそれに関連した空間の $\text{mod } p$ コホモロジーを研究することが研究目的であった。チャーン部分環もまた研究対象であったが連結リー群の整数係数ホモロジー群が p -ねじれ元を持たない場合には連結リー群の分類空間の $\text{mod } p$ コホモロジーは十分に理解されていると思われていた。そしてこの場合はチャーン環はコホモロジー環自体と一致するであろうと考えていた。しかしながらいざそれを証明しようと試みたのちに $\text{mod } p$ チャーン部分環がリー群 G の分類空間の $\text{mod } p$ コホモロジー環と一致しない例があることがわかった。この現象について研究し、単連結な単純リー群の場合に $\text{mod } p$ チャーン環が分類空間のコホモロジー環に一致するための奇素数 p に関する必要十分条件を得た。この研究については途中経過を含めて複数回口頭発表を行った。結果は論文にまとめて発表

する予定である。

(3) 代数幾何で重要な問題であるホッジ予想は有理数係数のサイクル写像の全射性についての予想である。その整数係数版の反例は1960年代にAtiyahとHirzebruchにより分類空間のコホモロジーのねじれを用いて構成されている。2010年にColliot-TheleneとSzamuelyは数論幾何におけるホッジ予想の類似である有限体の代数的閉体上の非特異射影多様体のサイクル写像の全射性についてのタイト予想に対して整数係数版の反例を構成した。Colliot-TheleneとSzamuelyはAtiyahとHirzebruchと同様に分類空間のコホモロジーのねじれを用いていた。ねじれではない元で反例を構成したのがPirutkaと柳田の論文"Note on the counterexamples for the integral Tate conjecture over finite fields"(Doc. Math. 2015)である。Pirutkaと柳田の論文はねじれのある例外リー群の分類空間のコホモロジーを使っていたので標数 p が2,3,5の時にしか反例が構成できなかった。Pirutkaと柳田の論文の一般化を考え、古典群 $SU(p)\times SU(p)$ の中心の部分群による商群を用いてPirutkaと柳田の結果をすべての素数 p に一般化した。この結果は査読付き論文"On the integral Tate conjecture over finite fields"として学術誌Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.に掲載された。

(4) Pirutkaと柳田の整数係数タイト予想の反例についての結果の一般化の際に着想を得てさらに分類空間のサイクル写像について研究した。有限群の分類空間のサイクル写像の単射性についてTotaroの本にあげてある問いに答える形でチャウ環から普通のコホモロジーへのサイクル写像が単射にならないような有限群で最小である可能性のある有限群を構成した。この結果は査読付き論文"On the cycle map of a finite group"として学術誌Annals of K-theoryに掲載された。

(5) Pirutkaと柳田および研究代表者の仕事に影響されてAntieauは別の p^2 次の射影線形群の分類空間を用いたさらなる整数係数ホッジ・タイト予想の反例の構成についての結果を得た。しかしながらそれは $p=2,3$ の場合だけであった。論文の中でAntieauはすべての奇素数 p の場合に同様の結果が得られると予想している。このAntieauの予想について研究した、肯定的に解決した。Tripathyも独立に同じ結果を得ている。この結果は査読付き論文"Representation theory and the cycle map of a classifying space"として学術誌Algebraic Geometryに掲載された。

(6) 研究代表者の2012年の論文"Chern classes and generators"では係数体の標数が2のときの例外群の分類空間のチャーン類について研究した。これと類似の計算を標数が奇素数のときに行った。結果は査読付き論文"Mod 3 Chern classes and generators"として学術誌Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.に掲載された。

(7) 基本アーベル2-群の分類空間のモチービックコホモロジーのモチービックスターノッド代数上の加群としての生成元について研究した。モチービック版のヒット問題を考えてこれを研究した。ヒット問題でピーターソン予想と呼ばれていた基本定理のモチービック版を研究し、ピーターソン予想のモチービック版が成り立たないことがわかったのでこの結果をまとめて論文"On the motivic Peterson conjecture"を書き、2017年10月にプレプリントサーバーarXivにアップロードした上で学術誌Homology, Homotopy and Applicationsに投稿し2018年4月に受理された。

(8) 整数係数ホッジ予想に関連してQuickは2016年11月にarXivにプレプリント"Examples of non-algebraic classes in the Brown-Peterson tower"をアップロードした。これはAtiyahとHirzebruchの整数係数ホッジ予想の反例の構成のモチービックコホモロジーへ一般化である。この結果をnon-torsionの場合に拡張して論文"Non-torsion non-algebraic classes in the Brown-Peterson tower"を書きプレプリントサーバーarXivにアップロードした。これは"On the integral Tate conjecture over finite fields"の結果のさらなる一般化である。

(9) この研究を通して代数幾何への代数トポロジーの応用、低次元のサイクル写像の研究の可能性に気づいた。分類空間の低次元の代数トポロジーという新しい研究の方向性が見出せたことが最大の研究成果かもしれない。この方向は次の研究課題「線型代数群の分類空間のチャウ環とサイクル写像の研究」で引き続き研究していく予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

1 Masaki Kameko, Mod 3 Chern classes and generators, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 93 (2017), no. 7, 55–60. (査読有) DOI:10.3792/pjaa.93.55

2 Masaki Kameko, Representation

theory and the cycle map of a classifying space, *Algebr. Geom.* 4 (2017), no. 2, 221–228. (査読有)
DOI:10.14231/AG-2017-011

3 Masaki Kameko, On the cycle map of a finite group, *Ann. K-Theory* 2 (2017), no. 1, 47–72. (査読有)
DOI: 10.2140/akt.2017.2.47

4 Masaki Kameko, Cohomology of classifying spaces of loop groups and finite Chevalley groups associated with spin groups, *Topology Appl.* 196 (2015), part B, 522–536. (査読有)
DOI:10.1016/j.topol.2015.05.031

5 Masaki Kameko, On the integral Tate conjecture over finite fields, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 158 (2015), no. 3, 531–546. (査読有)
DOI:10.1017/S0305004115000134

[学会発表](計 10 件)

1 亀子正喜, On the motivic Peterson conjecture. 高知ホモトピー論 談話会 2017, 2017 年.

2 亀子正喜, Brown-Peterson cohomology of certain classifying spaces. 代数トポロジーセミナー, 2017 年.

3 亀子正喜, Non-torsion non-algebraic classes in the Brown-Peterson tower., ホモトピー論シンポジウム, 2017 年

4 亀子正喜, On the cycle map of a finite group. RIMS 研究集会, 2017 年.

5 亀子正喜, Mod 3 Chern classes and generators. 福岡ホモトピー論 セミナー, 2017 年.

5 亀子正喜, On the 4th integral cohomology of the classifying space of a connected Lie group. ホモトピー論シンポジウム, 2016 年.

6 亀子正喜, Loops, Groups and Cohomology Theories. The First Shibaura Workshop on Mathematics, Systems and Control (SWMSC2015), 2015 年.

7 亀子正喜, On Chern subrings of connected Lie groups. 福岡ホモトピー論セミナー, 2015 年.

8 亀子正喜, On mod p Chern subrings of Lie groups. ホモトピー論シンポジウム,

2014 年.

9 亀子正喜, On the mod 5 cohomology of BF_4 . 福岡ホモトピー論セミナー, 2014 年.

10 Masaki Kameko, Cohomology of classifying spaces of loop groups and finite Chevalley groups. International Conference on Topology and Geometry 2013 Joint with the 6th Japan-Mexico Topology Symposium, 2013 年.

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

亀子 正喜 (KAMEKO, Masaki)

芝浦工業大学・システム理工学部・教授

研究者番号 : 50270343

(2) 連携研究者

柳田 伸顕 (YAGITA, Nobuaki)

茨城大学・教育学部・名誉教授

研究者番号 : 20130768