

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400098

研究課題名(和文)混合非退化特異点の幾何構造

研究課題名(英文)Geometric structure of mixed non-degenerate singularity

研究代表者

岡 睦雄(Oka, Mutsuo)

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号：40011697

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：ニュートン非退化混合超曲面のミルナーそくの基本的性質を明らかにした。特に強擬斉面関数をもつ混合多項式に関して、Varchenko型のゼータ関数の決定を行った。またそのリンクに接触構造を持つことを示した。この結果はNemethi他の仕事を強擬斉面関数をもつ混合多項式に拡張するもので、重要であると思われる。さらに強2変数擬斉次多項式でconvenientなものに関し、そのミルナーそくのトポロジーが対応する一次元射影空間のなかで一変数混合多項式で定義されるゼロ点の個数との関係を明らかにした。この結果は天文物理学で研究されているLens方程式と密接に関係していて、今後の研究の目標となる。

研究成果の概要(英文)：We clarified the structure of Newton non-degenerate mixed singularities. In particular, we gave a formula for the zeta function of mixed function with strongly polar weighted face functions. We also showed the existence of the contact structure on such a link. We also showed the relation of the moduli space of strongly mixed homogeneous polynomials of two variables and the moduli of mixed polynomials of one variables and the range of possible number of roots. It is also shown that the Lens equation studied in astro-physics has strongly related to our moduli problem.

研究分野：特異点の幾何学

キーワード：混合多項式 ミルナー束 ニュートン境界 ミルナーファイバー レンズ方程式

1. 研究開始当初の背景

複素超曲面の特異点研究はミルナー束の理論の発展で 1968 年以降、長足の進歩を見たが、ミルナー「複素超曲面特異点」(Studies, Princeton Press, 61)

にあるように実余次元 2 のリンクの補空間が S^1 上のファイバー構造をいつもつかは重要な問題であったが、実際にファイバー構造を持つ例はいくつも知られてなかった。その主な理由は

--実余次元 2 の実代数多様体の特異点研究は、具体的な研究手段がないことであった。

--モースの補題でわかるように非退化 2 次形式をとってみても複素数上では一意的であるが、実数上ではシルベスターの符号で知られるように、符号によって同型類が違ってくる。

それゆえ実余次元 2 のリンクの研究が立ち遅れていた。

岡による混合多項式の特異点研究

Oka, M: Non-degenerate mixed singularities, Kodai J. Math.

が現れて複素特異点研究に平行した理論をかなりの部分まで提供することがわかってきたので、今後の研究進展が期待できる状況となってきた。

しかし実代数幾何学の範疇にとどまると問題は複雑であった。

実多項式 $g(x,y), h(x,y)$ で定義される代数多様体 $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{\{2n\}} \mid g(x,y)=h(x,y)=0\}$ を複素数値関数

$$f(z) = g(x,y) + ih(x,y)$$

を考えてそのゼロ点として得られる複素実解析的超曲面 $\{z \in \mathbb{C}^n \mid f(z)=0\}$ と考えると、これが混合多項式のアイディアの出発点となる。

2. 研究の目的

混合多項式で定義される超曲面特異点の幾何学を複素超曲面のミルナー束の理論にそっていけるとどこまで示せるかを目標とする。細かく言えば

- a. ニュートン非退化な特異点の
- b. 具体的特異点解消
- c. ミルナー束の存在とその基本性質を示す。
- d. 強斉次混合多項式から決まる射影曲面の位相構造の決定
- e. 擬斉次混合多項式のモジュライ空間の連結成分の個数の決定し、可能なミルナー束の位相形を決定する。
- f. 混合多項式で定義される曲面の交点理論を構築する
などが研究目的である。

3. 研究の方法

実余次元 2 の実代数多様体

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{\{2n\}} \mid g(x,y)=h(x,y)=0\}$$

を複素数値関数

$$f(x,y) = g(x,y) + ih(x,y)$$

を考えて、さらに

$$x_j = (z_j + w_j)/2, \quad y_j = (z_j - w_j)/2i$$

を代数して f を z_j, w_j の混合多項式とみ

なす。ここで w_j は z_j の共役複素数とする。すなわち、 $f(x,y) = f(z,w)$.

しかる後に

$V = \{z \in \mathbb{C}^n \mid f(z,w)=0\}$ と考える。さらに f のニュートン境界を正則関数の場合にならって導入する。ニュートン境界非退化

の概念をニュートン境界の任意の面 D に対しその面関数を $\mathbb{C}^{\{n\}}$ に制限した関数 F_D

が臨界点がないことで強非退化性を定義する。非退化のもとで複素超曲面の特異点研究で使われるトーリック爆発射を使う。しかる後にミルナー束の全体の幾何学が面多項式で決まる擬斉次混合多項式の幾何学に帰着される。

面関数は一般にはラディアル擬斉次のみで極方向には擬斉次ではないが、極方向にも擬斉次の時 (混合擬斉次多項式のとき) は写像 f は大域的ファイバー構造

$$F: \mathbb{C}^n - \{f=0\} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

を持つ。したがってミルナー束はこのファイバー束と同型となる。まずそのミルナー束の位相構造を決定する。これがうまくいけば混合擬斉次多項式を面関数に持つ混合多項式は張り合わせの手法で一般の混合多項式に当てはめることができよう。

4. 研究成果

非退化混合特異点の基本構造が概ね明らかになった。

--非退化ニュートン境界をもち面関数が強擬斉次多項式の時、モノドロミーのゼーター関数を決定できた。正則関数のときの Varchenko の公式を混合多項式の時に拡張するものである。

これによりミルナー束のファイバーのオイラー数も定まる。

--同上の下でリンク多様体に接触構造が存在し、またミルナー束にシンプレクチック構造が入ることを示した (3, 6)。これは Caubel-Nemethi-Popescu-Pampu: Milnor open books and Milnor fillable contact 3-manifolds, Topology, 2006

の正則関数の場合の結果を混合多項式で面関数が強擬斉次多項式の時に拡張するものである。

--射影混合曲面の交点理論を作った。この場合のカギとなるポイントは正則曲面の場合と違って、局所交点数が負になることを正確に考慮することである。この応用として Thom の不等式の最極端な場合として

任意の種数 g を与えると埋め込み次数 1 の混合曲面で種数 g を持つものが存在することを具体的に構成して見せた。

--非孤立特異点を持つ混合多様体族の af -条件, Whitney 正則性を証明した (2)。

--ジョイン型の平面曲線の補空間の基本群を決定した (4, 5, 7)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

1 Blanloeil, V. and Oka, M.: Topology of strongly polar weighted homogeneous links, *Sut J. Math.*, 51, NO. 1, 2015, 119-128, 査読有

<http://www3.ma.kagu.tus.ac.jp/sutjmath/>

2. Oka, M.: On Milnor fibrations of mixed functions, a_f-condition and boundary stability, *Kodai J. Math.* 38(2015), 581-603. 査読有

<http://www.math.titech.ac.jp/~tosho/Journal/past/index.html>

3. Oka, M.: Mixed functions of strongly polar weighted homogeneous face type, *Advanced Studies in Pure Math.* 66, 173-202, 2015.

査読有

<http://mathsoc.jp/publication/ASPM/contents/CFM66.pdf>

4. Eyrat, C. and Oka, M.: Classification of the fundamental groups of join-type curves of degree seven, *J. Math. Soc. Japan*, 67, 2015, 2, 663-698, 査読有

<http://mathsoc.jp/publication/JMSJ/issues.html>

5. Eyrat, C. and Oka, M.: On the fundamental groups of non-generic R-join-type Curves, in “Bridging algebra, geometry, and topology”, Springer Proc. Math. Stat.

96, 137-157, 2014、査読有

<http://link.springer.com/bookseries/10533>

6. Oka, M.: Contact structure on mixed links, *Vietnam J. Math.*, 4, 2014, 3, 249-271, 査読有,

<http://link.springer.com/journal/10013/42/3/page/1>

7. Eyrat, C. and Oka, M.: Fundamental groups of join-type curves---achievements and perspectives, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 90, 2014, 2, 43-47, 査読有 http://www.japan-acad.go.jp/en/publishing/pja_a/archives.html

8. Eyrat, C. and Oka, M.: Fundamental groups of join-type sextics via dessins d'enfants, *Proc. Lond. Math. Soc.* 3, 107, 2013, 1, 76-120, 査読有

<https://www.lms.ac.uk/publications/journals>

9. M. Oka, On the roots of generalized Lens equation and an application, ArXiv1505.03576, 2015

査読無、<http://arxiv.org/archive/math>

[学会発表] (計 18 件)

1. Mutsuo Oka, Fundamental group of plane curves, Geometry seminar at University of Strasbourg, 2013年6月13日、ストラスブルグ大学、フランス

2. Mutsuo Oka, Fundamental group of R-join type plane curves, 国際会議

“Experimental and theoretical methods in algebra”, 2013年6月24日、Eforie Nord, Romania

3. Mutsuo Oka, Milnor fibration of mixed functions, 国際会議 “Geometry and topology of Singularities”, 2013年6月27日、Shanghai, China

4. Mutsuo Oka, On the Milnor fibrations of non-degenerate mixed polynomials, 国際ワークショップ “Geometry of Singularity”, 2013年8月28日、Warsaw, Poland

5. Mutsuo Oka, Geometry of mixed links, 国際ワークショップ “Japan-Turkey joint Conference”, 2013年11月24日、Istanbul, Turkey

6. Mutsuo Oka, Introduction to Fundamental groups of plane curves, 国際CIMPA特異点

スクール、 2013年12月2-6日、ハノイ、Vietnam

7. Mutsuo Oka, Contact structure on the mixed links, 接触構造の研究集会, 2014年1月10日, 高知大学、高知

8. Mutsuo Oka, On Milnor fibration defined by a mixed polynomial, CAS Workshop on Geometry, 2014年7月4日 Warsaw 工科大学、Warsaw, Poland

9. Mutsuo Oka, On the geometry of dual curves, Pragatz 代数幾何学セミナー, 2014年7月17日, Banach センター、Warsaw, Poland

10. Mutsuo Oka, Thom's af-condition for mixed polynomial with non-isolated singularity, "Workshop on Singularity", 2014年8月7日, Sao Carlos 大学、Sao Carlos, Brazil

11. Mutsuo Oka, On the Milnor fibration of mixed functions with non-isolated singularities, 「分岐被覆のワークショップ」、2015年3月17日、首都大学東京、東京

12. Mutsuo Oka, On the zeros of generalized Lens equations, メキシコ-ブラジル合同特異点会議, 2015年7月15日、Salvador 大学、Brazil

13. Mutsuo Oka, On the non-isolated singularities of mixed functions and Thom's af-condition, ブラジル数学会特異点分科会, 2015年7月28日, IMPA, リオデジャネイロ、Brazil

14. Mutsuo Oka, On the Roots of generalized Lens equations and its application, 「リーマン面の研究集会」、2015年8月26日、東京大学

15. Mutsuo Oka, On the generalized Lens polynomials and application to Mixed

functions, 日豪特異点ワークショップ

プ, 2015年11月27日、鹿児島大学、鹿児島

16. Mutsuo Oka, On the Lens equations and its generalization, 松本幸夫ミニワークショップ、2016年1月25日、学習院大学

17. Mutsuo Oka, Introduction to the fundamental groups of plane curves, A. Dimca Seminar, 2016年2月12日、ニース大学、France

18. Mutsuo Oka, On the generalized Lens equations and its application, Mini-Workshop on singularities, 2016年2月29日、東北大学

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織
(1) 研究代表者
岡 睦雄 (Mutsuo Oka)
(東京理科大学・理学部・教授)

研究者番号：40011697

(2) 研究分担者 ()

研究者番号：

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：

