

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 29 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400099

研究課題名(和文) 葉層構造と力学系の研究

研究課題名(英文) Study of Foliations and Dynamical Systems

研究代表者

松元 重則 (MATSUMOTO, Shigenori)

日本大学・理工学部・名誉教授

研究者番号：80060143

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：円周上の向きを保つ無限回可微分同相写像で回転数がLiouville数であるものを考え、その保存する測度のハウスドルフ次元が0であるものが通用的であることを示した。また無限回可微分同相写像がLebesgue測度により定める軌道同値類の型を研究し、任意の与えられた型をもつ可微分同相写像が空間全体の中で稠密であることを示した。また、コンパクト多様体上の葉層構造でその葉が双曲的リーマン面であるものを考え、その葉に沿ったホロサイクル流が極小となるための十分条件を得た。

研究成果の概要(英文)：We studied orientation preserving infinitely differentiable diffeomorphisms of the circle whose rotation numbers are the given Liouville numbers. We showed that the diffeomorphisms whose invariant measures have the Hausdorff dimension 0 form a residual subset. We also studied the types of the orbit equivalence classes that the diffeomorphisms determine together with the Lebesgue measure. We showed that the diffeomorphisms which take the given type form a dense subset. We also considered foliations on compact manifolds whose leaves are hyperbolic Riemann surfaces. We obtained sufficient conditions for the associated leafwise horocycle flows to be minimal.

研究分野：葉層構造と力学系の位相幾何学的研究

キーワード：葉層構造 調和測度 葉の位相 円周上の同相写像 Liouville 数 極小流れ

1. 研究開始当初の背景

種数 g の向き付けられた曲面の基本群 Γ_g の円周 S^1 への連続作用 ϕ のなす空間は、 ϕ のオイラー数 $E(\phi)$ の値により、連結成分に分けられる。オイラー数 $E(\phi)$ はその値を $[-2g+2, 2g-2] \cap \mathbb{Z}$ にとる。 $i = \pm(2g-2)$ に対しては、 $E^{-1}(i)$ が連結であることは知られていたが、それ以外の i に対し、 $E^{-1}(i)$ の連結成分はまったくわかっていなかった。研究開始の前年に至り、K. Mann により、 i が $2g-2$ の約数の時、 $E^{-1}(i)$ は複数の連結成分からなるという結果がもたらされ、さらなる研究が必要であると考えに至った。

2. 研究の目的

本研究の目的のひとつは、上記の群 Γ_g の S^1 への作用を詳細に調べる事であった。このほかに、コンパクト多様体上の、双曲的リーマン面による葉層構造 \mathcal{F} に付随するホロサイクル流の力学系的性質を調べる事もその目的であった。

3. 研究の方法

Γ_g の S^1 への作用を調べるために用いた方法は次のとおりである。まず、群 Γ_g を自然に自由群の融合積として書き下しておき、各自由群に制限した作用に対応して S^1 の「分割」を考える。次に融合積に対応させてこれらの分割の「組み合わせ」を考えるとこのものであった。

上記ホロサイクル流の研究のためには、葉層構造の調和測度を考え、エルゴード理論を応用する方法を用いた。

4. 研究成果

Zimmer 問題と関連して、2次元以上の多様体 M の C^r -級微分同相写像のなす群の連結成分群 G_r は S^1 上に非自明に作用することができるかという問題がある。この場合、作用の連続性は問わない。また、群 G_r の単純性が必要なので、 $r \neq \dim(M) + 1$ という仮定を置く。このとき K.Mann は G_r ($r \geq 2$) は S^1 上に C^2 級には作用できない

という結果を得ていた。本研究ではこれを拡張して、 G_r ($r \geq 1$) は S^1 上に C^1 級にも作用できないという結果を得た（雑誌論文①）。 C^0 級にはどうかという問題は未解決である。

M をコンパクト多様体とし、 \mathcal{F} をその上の葉層構造とする。力学系 (\mathbb{Z} -作用、 \mathbb{R} -作用) の場合と異なり、一般的に \mathcal{F} は横断的に不変な測度を有しない。Lucy Garnett は横断的不変測度を f 拡張するものとして \mathcal{F} 及びその葉向リーマン計量 g に付随する「調和測度」を定義した。我々にとって興味深い葉層構造 \mathcal{F} はホロノミー不変測度はもたないものの、調和測度は常に持つのである。以下、葉層構造の葉は双曲的リーマン面であるとする。葉層構造 \mathcal{F} の調和測度に関する重要な問題として一意性がある。 \mathcal{F} の調和測度がただ一つに限られるとき、 \mathcal{F} は一意エルゴード的という。通常の力学系と同様に、このとき \mathcal{F} は連続関数あるいは測度の拡散について強い一様性を持つ。Bonatti と Gomez-Mont は一意エルゴード的なある種の葉層構造に対し、調和測度の等分布定理を示した。しかしながら、一般の葉層構造は、たとえ極小（各葉が稠密のこと）であったとしても、一意エルゴード性は有しない。雑誌論文⑦において、我々は、等分布定理の成立しない極小葉層の例を構成した。また、任意の極小葉層構造に対し成立する形で「弱い等分布定理」を証明した。

引き続き、 \mathcal{F} はコンパクト多様体上の双曲的リーマン面による極小葉層構造であるとする。以下に雑誌論文⑤および③で得られた結果を報告する。 $\Pi: \hat{M} \rightarrow M$ を \mathcal{F} の単位葉向接束とする。 \hat{M} は自然に定義された3次元葉層構造 $\hat{\mathcal{F}}$ を持つ。これは $PSL(2, \mathbb{R})$ の局所自由作用で与えられるものである。 B を $PSL(2, \mathbb{R})$ の部分群で上三角行列からなるもの、 D を対角行列からなるもの、さらに U を冪等上三角行列からなるものとするとき、これらは $\hat{\mathcal{F}}$ の部分葉層構造 B, D 及び U を与える。 D 及び U は1

次元葉層構造であり、各々、測地流、ホロサイクル流と呼ばれる。 X を \hat{M} の B -不変閉集合とし、 μ を \mathcal{F} の任意のエルゴード的調和測度とする。今、

$$M_{X,1} = \{x \in M \mid \sharp(\pi^{-1}(x) \cap X) = 1\}$$

とおくとき、次が成立する。

$$\mu(M_{X,1}) = 0 \text{ ならば、} X = \hat{M}$$

この系として、葉層構造 \mathcal{B} は唯一つの極小集合を有することがわかる。これを用い次が示された。

\mathcal{F} がホロノミー不変な横断的測度を持つならば、葉層構造 \mathcal{B} は極小である。

さらに、葉層 \mathcal{U} すなわちホロサイクル流の極小性のための十分条件が次の (1)、(2) として、二つ得られた。

(1) \mathcal{F} は平面葉を持たないリーマン葉層である。

(2) \mathcal{F} は余次元 1 であり、 \mathcal{B} は極小である。

条件 (1) において「平面葉を持たない」という条件が真に必要なかどうかは不明である。おそらくはすべての極小リーマン葉層に対し、 \mathcal{U} は極小であろうと考えられるが、今後の研究を俟たなければならない。また、(2) において「 \mathcal{B} は極小である。」という条件は真に必要な。3次元多様体上に局所 B 作用で与えられた葉層は、葉向単位接束上の 3次元葉層にいわゆる対角部分があり、そこでの B -作用は極小になりえないのである。しかし、これ以外の反例があるか否かはわかっていない。

関連して得られた無限型リーマン面上のホロサイクル流に関する結果 (雑誌論文⑥) を報告する。無限型リーマン面 S が緊密であるとは、 S のコンパクト部分曲面 S_n , $n \in \mathbb{N}$ による S のとりつくし列があり、各 S_n の境界成分は長さが一定以下であることとする。我々が得た結果は次のとおりである。

S が緊密のとき、 S の単位接束上に定まるホロサイクル流は極小集合を持たない。

最後に、円周上の C^∞ 微分同相写像に関する研究結果 (雑誌論文⑫および⑬) を報

告する。円周 S^1 の C^∞ 級可微分同相写像で回転数が α であるものの全体を F_α と表す。これは C^∞ 位相により、Baire 空間をなす。回転数 α が無理数の時、各 $f \in F_\alpha$ は唯一つの不変確率測度 μ_f を有する。以下、 α が Liouville 数の場合を考える。この場合、 f により、測度 μ_f の性質は様々に変わる。いま、 F_α^0 で、 μ_f の Hausdorff 次元が 0 であるような f の集合を表す。このとき、我々が得た結果は次のとおりである。任意の Liouville 数 α に対し、 F_α^0 は F_α 中、residual である。

同じ設定で $f \in F_\alpha$ の (Lebesgue 測度に関する) 軌道同値類を考える。軌道同値類に対しては ratio set が定義され、それに応じて f の軌道同値類は II_1 , II_∞ , III_λ , $\lambda > 1$, III_∞ , III_0 の各々の型に分類される。これに対し、次の結果を得た。 α を Liouville 数とする。上記の任意の型を持つものは、 F_α の中で稠密である。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 15 件)

① 松元 重則 Actions of groups of diffeomorphisms on one-manifolds by C^1 diffeomorphisms, “Geometry, Dynamics and Foliations,” ed. T. Asuke, S. Matsumoto and Y. Mitsumatsu, 査読有, 72 巻, 2017 Advanced Study in Pure Mathematics, MSJ, 441-451.

<http://arXiv:1404.5304>.

② 松元 重則 Kinematic expansive suspensions of irrational rotations on the circle, Hokkaido Math. J. 査読有 46 巻, 2017, 473-485.

[doi:10.14492/hokmj/1510045307](https://doi.org/10.14492/hokmj/1510045307)

③ 松元 重則 Remarks on the horocycle flows for foliations by hyperbolic surfaces, Proc. A. M. S. 査読有 145 巻, 2017, 335-362.

<http://doi.org/10.1090/proc/13184>

- ④ 松元 重則 Basic partitions and combinations of groups acting on the circle: A new approach to a theorem of Kathryn Mann, *l'Enseig. Math.* 査読有 62 巻, 2016, 15-47.
doi: 10.4171/LEM/62-1/2-4
- ⑤ Matilde Martinez, 松元 重則 Alberto Verjovsky, Horocycle flows for laminations by hyperbolic Riemann surfaces and Hedlund's theorem, *J. Modern Dynamics.* 査読有 10 巻, 2016, 113-134.
doi:10.3934/jmd.2016.10.113
- ⑥ 松元 重則 Horocycle flows without minimal sets, *J. Math. Sci. U. Tokyo*, 査読有 23 巻, 2016, 661-673.
<http://arXiv:1412.0410>
- ⑦ 松元 重則 Weak form of equidistribution theorem for harmonic measures of foliations by hyperbolic surfaces, *Proc. A. M. S.* 査読有 144 巻, 2016, 1289-1297.
<http://doi.org/10.1090/proc/12852>
- ⑧ 松元 重則 Nontrivial attractor repeller maps, *J. Math. Soc. Japan*, 査読有 67 巻, 2015, 477-501.
doi: 10.2969/jmsj/06720477
- ⑨ 松元 重則 New proofs of theorems of Kathryn Mann, *Kodai Math. J.* 査読有 37 巻, 2014, 427-433.
doi:10.2996/kmj/1404393896
- ⑩ 松元 重則 Continuous leafwise harmonic functions on codimension one transversely isometric foliations, *Proc. A. M. S.* 査読有 Series B 1 巻, 2014 53-61.
<http://arXiv: 1306.0058>
- ⑪ 松元 重則 The space of (contact) Anosov flows on 3-manifolds, *J. Math. Sci. U. Tokyo*, 査読有 20 巻, 2013, 445-460.
<http://arXiv:1210.0070>
- ⑫ 松元 重則 A generic dimensional property of the invariant measures for circle diffeomorphisms, *J. Modern Dynamics*, 査読有 7 巻, 2013, 553-563.
doi:10.3934/jmd.2013.7.553
- ⑬ 児玉大樹, 松元 重則 Minimal C^1 diffeomorphisms of the circle which admit measurable fundamental domains, *Proc. A. M. S.* 査読有 141 巻, 2013, 2061-2067,
<http://doi.org/10.1090/S0002-9939-2013-11472-3>
- ⑭ 松元 重則 A characterization of the standard Reeb flow, *Hokkaido Math. J.* 査読有 42 巻, 2013, 69-80
doi:10.14492/hokmj/1362406639
- ⑮ 松元 重則 Orbit equivalence types of circle diffeomorphisms with a Liouville rotation number, *Nonlinearly* 査読有 26 巻, 2013, 1401-1414
doi:10.1088/0951-7715/26/5/1401
- [学会発表] (計 9 件)
- ① 松元 重則 Isolated circular orders of $PSL(2, Z)$, 研究集会「葉層構造の幾何学とその応用」 2017
- ② 松元 重則 Equidistribution theorem for harmonic measures of foliations, 研究集会「葉層構造の幾何学とその応用」 2016
- ③ 松元 重則 Circular orders of countable groups, 研究集会「Foliations and Diffeomorphism Groups」 2016
- ④ 松元 重則 Nontrivial attractor repeller maps of S^2 and rotation numbers, 研究集会「Surfaces in Luminy」 2016
- ⑤ 松元 重則 Weak equidistribution theorem for harmonic measures, 研究集会

「Contact structures, laminations and foliations」 2016

⑥ 松元 重則 Dynamics of geodesic and horocycle flows for laminations by hyperbolic surfaces, 研究集会「Foliations 2016」 2016

⑦ 松元 重則 Local stability of group actions on the circle, 研究集会「冬の力学系研究集会」 2016

⑧ 松元 重則 The space of contact Anosov flows on 3-manifolds, 研究集会「Workshop on geometry and dynamics on foliations」 2014

⑨ 松元 重則 Continuous leafwise harmonic functions on codimension one transverse isometric foliations, 研究集会「Geometry of foliations 2013」 2013

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松元 重則 (MATSUMOTO Shigenori)

日本大学・理工学部・名誉教授

研究者番号： 80060143