

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 16 日現在

機関番号：32690

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400101

研究課題名(和文)3次元多様体の基本群の副有限完備化と位相不変量の関係について

研究課題名(英文)Pro-finite completion of a 3-manifold group and its relation to topological invariants

研究代表者

北野 晃朗 (Kitano, Teruaki)

創価大学・理工学部・教授

研究者番号：90272658

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：3次元多様体の基本群の副有限完備化の観点から3次元多様体のトポロジーについて研究を行った。副有限完備化は整数論、ガロア群の理論と深く関係している。様々な位相不変量の中で基本群の線型表現を用いて定義されるReidemeister torsionについて考察をした。この不変量は一般的な状況では有理数の有限次代数拡大体上の表現に対して定義され、その値は代数的な数となる。この不変量とガロア群の作用込みで考えることが1980年代にDenis Johnsonにより提唱されており、その側面からの研究を中心に幾つかの公式を得ることが出来た。

研究成果の概要(英文)：We studied 3-dimensional topology from the view point of the pro-finite completion of the fundamental group of a 3-manifold manifold. In particular we studied Reidemeister torsion for $SL(2;C)$ -representations, which is defined by using linear representations of the fundamental group. Denis Johnson proposed some theory related with Reidemeister torsion. We obtained some formula of Reidemeister torsion, which would be related with Galois group, or Galois extensions of a field.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：基本群 Reidemeister torsion linear representation

1. 研究開始当初の背景

群の副有限完備化は元々、整数論、特にガロア群の理論において重要視されていた。1990年代以降、徐々に幾何学的な群論の立場からも研究が盛んになった。さらに2000年以降においては、特に3次元多様体の基本群、例えば双曲的多様体の基本群における研究が注目されていった。

そこにおける重要な問題の一つは、剰余有限な有限表示可能な二つの群において、その副有限完備化が同型であるならば、元々の群は同型か?という問題である。

全く一般的な状況では、この答えは否定的である。すなわち、二つの剰余有限な有限表示群において、それらの副有限完備化が同型であることは、元々その二つが同型であることを導かない。

しかしながら、3次元の結び目群や特別な幾何構造をもつ場合には、副有限完備化から元の群の同型が導かれるのではないか、という問題意識があった。例えば、結び目群はアーベル化が無限巡回群であり、構造が比較的単純である。これが本研究の背景であり、動機である。

2. 研究の目的

2つの3次元多様体の基本群を考えて、もしもそれらの副有限完備化が同型であった時に、そこから元の群の同型が導かれたとする。そうであるならば、幾何学的な構造を許容する場合、3次元多様体の基本群の同型から3次元多様体の位相同型が導かれる。従って、当然位相不変量は等しくなる。このことを踏まえて、副有限完備化と3次元多様体の様々な位相不変量との関係を調べることが目的であった。特に結び目群の場合の

- (1) アレキサンダー多項式、
 - (2) ねじれアレキサンダー多項式、
- などと副有限完備化の関係について調べることが目的とした。

3. 研究の方法

一般論の構築には多くの困難があるので、次のような二つのケースをメインに考えていた。

(1) 結び目群の場合

この場合、群のアーベル化が整数のなす群と同型であり、そのアーベル化から得られるアレキサンダー多項式を手掛かりに研究を進めることを試みた。すなわち無限巡回群への全射があるので、結び目群の副有限完備化から無限巡回群の副有限完備化の群への準同型写像が存在する。この写像を手掛かりにアレキサンダー多項式に関して調べることが試みた。

(2) ザイフェルトファイバー空間の場合

この場合には、その基本群の中に無限巡回群を中心として含む。また中心が無限巡回群

になることでザイフェルトファイバー空間の基本群は特徴付けられる。結び目の場合とは異なるが、この中心を手掛かりに、ザイフェルトファイバー空間の基本群の副有限完備化に関する研究を試みた。

4. 研究成果

副有限完備化と位相不変量との間の直接的な関係を示すことはできなかった。また、海外の他の研究グループにより、進展もあった。本研究において、当初の目論見よりも研究が進展しなかったその理由の一つは具体的な例がほとんどなく、その構成が非常に難しいことであつたと考えられる。

そこで、基本群と関連した位相不変量の研究に主な焦点を当てることにした。特に古典的に知られた基本群の線型表現から定まる位相不変量としてライデマイスタートーションがある。この不変量は、3次元多様体や結び目の量子不変量とも密接に関係している一方で、はじめに研究の目的のところで挙げた結び目のアレキサンダー多項式やねじれアレキサンダー多項式とも直接的に関係する。このライデマイスタートーションとキャッソン不変量に関してデニス・ジョンソンにより1980年代末にある理論が提唱されている。この理論に関連してライデマイスタートーションに関する公式が得られた。

具体的にはライデマイスタートーションを $SL(2; \mathbb{C})$ -表現に対して考える。3次元多様体の基本群の $SL(2; \mathbb{C})$ -既約表現の共役類は整数環上の代数多様体の構造が入る。一般的な状況ではこれは0次元代数多様体、すなわち n 次元複素空間の中の有限個の点の集合となり、その座標は代数的数となっている。したがって、このような場合においては基本群の表現は複素数体上の表現ではなく、有理数体の有限次代数拡大体上の $SL(2)$ -表現となる。ここにガロア群が自然に現れ、ガロア群が表現の共役類の集合に作用することがわかる。

ジョンソンはこれらの表現に対してライデマイスタートーションを考え、これらを零点としてもつ多項式を不変量として考えることを提案した。

本研究ではこの理論に関連してライデマイスタートーションの値、あるいはライデマイスタートーションを零点にもつ多項式に関する結果を得た。

具体的には以下の通りである。

- (1) ブリースコンホモロジー球面と呼ばれる3次元多様体のクラスに対してジョンソンの定義した torsion 多項式を具体的に決定し、トラス結び目の Dehn 手術でこの多様体を記述した時に、この多項式の再帰的な公式を得た。

- (2) 8の字結び目のデー手術で得られるホモロジー球面に対して、ライデマイスタ

ートーションの値を基本群のメリディアン
の像のトレースの値で表す公式を得た。

(3) 8 の字結び目のデーヌ手術で得られるホ
モロジー球面の場合に、ライデマイスタート
ーションの値をメリディアンのトレースで
表す公式を用いて、ジョンソンの torsion 多
項式を表す公式を得た(Anh Tran 氏との共同
研究)。

(4) ブリースコンホモロジー球面の
SL(2;C)-表現の共役類の集合が SU(2)-表現
で代表されるものと SL(2;R)-表現で代表さ
れるものに分解されることを示した(山口祥
司氏との共同研究)。

(5) 2 橋結び目の SL(2;C)-表現のライリー多
項式に関して、結び目群の間の全射準同型
写像の存在と可除性との関係調べた(森藤
孝之氏との共同研究)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に
は下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Teruaki Kitano, Reidemeister torsion
of a 3-manifold obtained by an integral
Dehn-surgery along the figure-eight
knot. Kodai Math. J. 39 (2016), no.
2, 290–296.

Teruaki Kitano, Introduction to
twisted Alexander polynomials and
related topics, Winter Braids Lecture
Notes Volume 2 (2015), Exp. No. 4, 35 p.

北野晃朗, ねじれ Alexander 多項式の
20 年 -- Alexander 多項式の精密化とその
応用. 数学 65 (2013), no. 4, 360–384.

[学会発表](計 9 件)

北野晃朗-Anh Tran, Brieskorn ホモロ
ジー 3 球面の基本群の SL(2;C)-表現の
Reidemeister torsion から定まる多項
式について, 2017 年 3 月 25 日, 日本数
学会年会, 首都大学東京

Teruaki Kitano, A polynomial
invariant of a homology 3-sphere
defined by Reidemeister torsion,
East Asian school of knots and

related topics, 2017 年 2 月 15 日

Teruaki Kitano, A polynomial
invariant of a homology 3-sphere
defined by Reidemeister torsion,
RIMS 研究集会「Casson 不変量に関わ
る 3 次元多様体の不変量」, 2017 年 1
月 26 日, RIMS, 京都大学

北野晃朗 - 山口祥司 ,
SL(2;R)-representations of a
Brieskorn homology 3-sphere, 2016
年 9 月 17 日, 関西大学

結び目群の SL(2;C)-表現から定まる
C²-係数ねじれ 1 次元コホモロジーと
twisted Alexander polynomial, 2015
年 9 月 13 日, 日本数学会秋季総合分科
会, 京都産業大学

8 の字結び目を Dehn 手術して得られ
るホモロジー球面の SL(2;C)-既約表現
に対応する Reidemeister torsion につ
いて, 日本数学会年会, 2015 年 3 月 23
日, 明治大学

Reidemeister torsion of a homology
3-sphere obtained by 1/n-surgery
along a (p,q)-torus knot, East Asian
school of knots and related topics, 上
海師範大学, 2015 年 1 月 28 日

トラス結び目を Dehn 手術して得ら
れるホモロジー球面の SL(2;C)-既約表
現に対応する Reidemeister torsion に
ついて, 2014 年 9 月 28 日, 日本数学会
秋季総合分科会, 広島大学

Reidemeister torsion of a homology
3-sphere surgeried along a (p,q)-torus
knot for SL(2;C)-representations,
2014 年 8 月 14 日, COEX Seoul, ICM
Seoul 2014

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

北野晃朗 (KITANO, Teruaki)
創価大学・理工学部・教授
研究者番号：90272658

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

森藤孝之 (MORIFUJI, Takayuki)
慶応義塾大学・経済学部・教授
研究者番号：90334466

(4) 研究協力者

Anh TRAN (TRAN, Anh)
University of Texas at Dallas