

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 17 日現在

機関番号：12614

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400106

研究課題名(和文)幾何学的手法を用いた可積分力学系の研究

研究課題名(英文)Research on integrable dynamical systems using geometric methods

研究代表者

竹縄 知之 (Takenawa, Tomoyuki)

東京海洋大学・学術研究院・准教授

研究者番号：70361805

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：Fuchs型線形常微分方程式のモノドロミー保存変形から、差分パンルヴェ方程式を得るための一般的な明示公式を発見した。またそれを離散ハミルトン系として定式化した。

有理楕円曲面の自己同型写像の非自励化について、楕円曲面の楕円ファイバーを選ぶごとに、対応する離散パンルヴェ方程式を導出する手法を定式化した。その際に鍵となるのが、ピカル群への作用から写像を構成する手法であるが、そのための一般的な公式を発見した。また、結果として得られる楕円差分パンルヴェ方程式の簡約版について、これまでに知られていない対称性を持つものを発見した。

研究成果の概要(英文)：We have found a general explicit formula for obtaining the differential Painleve equation from monodromy preservation deformation of the Fuchs type linear ordinary differential equations. We also formulated it as a discrete Hamiltonian system. Regarding deautonomization of isomorphic mappings of a rational elliptic surfaces, we have formulated a method to derive the corresponding discrete Painleve equation to a choice of an elliptical fiber. The key to this is a method of constructing a map from the action on the Picard group, and we found a general formula for that. In addition, we have discovered symmetries which were not known so far for the simplified version of the resulting elliptic difference Painleve equations.

研究分野：可積分系

キーワード：パンルヴェ方程式 力学系 有理曲面 モノドロミー

1. 研究開始当初の背景

一般に可積分な力学系とは、代数的に記述され、時間発展について可逆な有限自由度の力学系であって、何らかの可積分構造を持つものと考えられる。その中でも微分方程式で記述されるものは連続系、差分方程式で記述されるものは離散系と呼ばれる。

可積分構造の中でも特に重要なのが、パンルヴェ性と呼ばれる概念で、これは微分方程式の複素解が「有限個の定点を除いて有理型関数」になるというものである。

Painleve および Gambier により、パンルヴェ性を持つ 2 階の常微分方程式は、線形方程式や楕円関数の満たす方程式など既知のもの以外に、本質的に 6 個の方程式に帰着されることが 20 世紀初頭までに示されており、この 6 個の方程式はパンルヴェ方程式と呼ばれる。パンルヴェ性が重要なのは、可解格子モデルやソリトン方程式など無限自由度の場合も含め、可積分性がパンルヴェ性に帰着されるという点にある。

パンルヴェ方程式は、オリジナルの微分方程式の直接的な分類の他に、線形常微分方程式のモノドロミー保存変形や、岡本の初期値空間（初期値が定義される空間を、解のフローが適切に流れるように取り直した空間）と呼ばれる代数曲面の分類からも得られる（岡本、坂井）。前者のモノドロミー保存変形による方法はパンルヴェ方程式の高階化と相性が良く、近年盛んに研究されている。

2. 研究の目的

本研究では、1. 初期値空間を用いたパンルヴェ性の証明、2. 離散力学系における初期値空間の存在と可積分性とのギャップの解析的特徴付け、3. 高次元力学系の初期値空間、4. モノドロミー（コネクション）保存変形と離散ハミルトニアンについて新たな知見を得ることを目的とした。

3. 研究の方法

主に単独で、テーマによっては国内外の研究者と協力して、連続および離散の可積分な力学系に対し、初期値空間などの幾何構造への作用を調べることにより、分類理論の構築およびパンルヴェ性を始めとする解の解析的性質について理論的研究を行った。

初年度に初期値空間を利用したパンルヴェ性の証明について研究し、そこで得た知見を基に高次元化や離散アナログなど他のテーマについて研究を進める。数式処理システムによる検証、プログラムの作成を行った。関連する学術的会合に出席して議論・発表を通じて知見を深め、また必要な文献を参照した。

4. 研究成果

研究目的で挙げた 4 つの研究テーマに関して研究を行い、以下のように一定の成果を得た。

研究テーマ 1, 2 に関して：

当初の目論見であるパンルヴェ性そのものの新たな証明法は発見できなかったが、以下のような研究成果を得た。

(1) ルーマニア物理核工学研究所の A. S. Carstea 氏と共著で執筆した、複素有理曲面上の力学系の初期値空間の極小化に関する論文が出版された。

(2) ノーザンコロラド大学の A. Dzhamay 氏、ルーマニア物理核工学研究所の A. S. Carstea 氏と共同で、有理楕円曲面の自己同型写像の非自励化について取り組んだ。その結果、楕円曲面の楕円ファイバーを選ぶごとに、対応する離散パンルヴェ方程式を導出する手法を定式化した。その際に鍵となるのが、ピカル群への作用から写像を構成する手法であるが、そのための一般的な公式を発見した。また、結果として得られる楕円差分パンルヴェ方程式の簡約版について、これまでに知られていない対称性を持つものを発見した。これらの結果をプレプリントとして公開するとともに専門誌に投稿した。

(3) 上記の研究で得られた因子類から写像を復元する方法を利用することにより、タウ関数の新たな定式化と双線形恒等式の自動的導出が行えることを見出した。可積分力学系のタウ関数はソリトン方程式との関係など、可積分構造を特徴づける重要なものであるが、その定義にはいくつかの異なるバージョンがあり、ややもすると混乱がみられる。本研究の定義は幾何的に既存のものよりも自然であると考えられる（論文準備中）。

研究テーマ 3 に関して：

(4) A. S. Carstea 氏と高次元の可積分力学系や、初期値空間が構成できない場合への応用について予備的な研究を行った。

研究テーマ 4 に関して：

(5) 東京大学の坂井秀隆氏、ノーザンコロラド大学の A. Dzhamay 氏と連携し、Fuchs 型線形常微分方程式のモノドロミー保存変形から、差分パンルヴェ方程式を得るための一般的な明示公式を発見した。またそれを離散ハミルトン系として定式化した。特に D5, E6, E7 型の差分パンルヴェ方程式について

は2階の方程式への簡約も行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2件)

A. Dzhamay and T. Takenawa, Geometric Analysis of Reductions from Schlesinger Transformations to Difference Painlevé Equations, Contemporary Mathematics 651(2015) 87-124 査読有

A. S. Carstea and T. Takenawa, A note on minimization of rational surfaces obtained from birational dynamical systems, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 20:sup 1 (2013) 17-33 査読有

[学会発表](計 13件)

Tomoyuki Takenawa, From the QRT maps to elliptic difference Painlevé equations, Elliptic Hypergeometric Functions in Combinatorics, Integrable Systems and Physics, 2017年3月21日, Vienna (オーストリア)

Tomoyuki Takenawa, From the QRT maps to elliptic difference Painlevé equations, 東京大学離散数理モデリングセミナー, 2016年12月16日, 東京大学

Tomoyuki Takenawa, Fiber-dependent deautonomisation of integrable 2D mappings, 12th International Conference on Symmetries and Integrability of Difference Equations, 2016年6月8日, Sainte-Adèle (カナダ)

Tomoyuki Takenawa, Fiber-dependent deautonomisation of integrable 2D mappings, the Discrete Integrable Systems Workshop 2016 at TSIMF, 2016年4月12日, Sanya (中国)

A. S. Carstea, A. Dzhamay and T. Takenawa, Fiber-dependent deautonomisation of integrable 2D mappings, Joint Math Meetings, 2016年1月6日, Seattle (アメリカ)

Tomoyuki Takenawa, Geometric introduction to discrete Painlevé equations, The International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM), 2015年8月15日, Beijing(中国)

Tomoyuki Takenawa, Geometric introduction to discrete Painlevé equations, The Ninth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory, 2015年4月3日, Athens (アメリカ)

Tomoyuki Takenawa, Geometric introduction to discrete Painlevé equations, 国際研究会「Integrable Systems and Representation Theory」, 2015年3月11日, 東京海洋大学

Tomoyuki Takenawa, Schlesinger transformation and discrete Painlevé equation of type $A_1(1)^*$, International Conference on Symmetries and Integrability in Difference Equations (SIDE2014), 2014年6月7日, Bangalore (インド)

Tomoyuki Takenawa, Dynamical systems on rational elliptic surfaces, 研究集会「モジュライ空間と自己写像」, 2014年3月5日, 京都

Tomoyuki Takenawa, Discrete Hamiltonian structure of Schlesinger systems, Front Range Algebra, GeoMEtry and Number Theory Seminar, 2014年1月28日, Fort Collins (アメリカ)

A. Dzhamay and T. Takenawa, Schlesinger transformation and discrete Painlevé equation of type $A_1(1)^*$, Joint Math Meetings, 2014年1月18日, Baltimore (アメリカ)

Tomoyuki takenawa, Dynamical systems on rational elliptic surfaces, Elliptic Integrable Systems and Hypergeometric Functions, 2013年7月6日, Laiden (オランダ)

[図書](計 0件)

[産業財産権]

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

[その他]

ホームページ

研究:

<http://www2.kaiyodai.ac.jp/~takenawa/research.html>

パウルヴェの関数による作曲:

http://researchmap.jp/jopfp9n2p-2173420/#_2173420

6. 研究組織

(1)研究代表者

竹縄 知之 (TAKENAWA TOMOYUKI)

東京海洋大学・学術研究院・准教授
研究者番号：70361805

- (2)研究分担者 なし
- (3)連携研究者 なし