

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400108

研究課題名(和文) 退化可積分系の摂動問題と共鳴現象の数理

研究課題名(英文) Perturbation problems for degenerate integrable systems and mathematics for resonance phenomena

研究代表者

伊藤 秀一 (Ito, Hidekazu)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：90159905

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：可積分系および通常よりも過剰な個数の第一積分をもつ超可積分系の大域的な解構造に関わる諸問題を、平衡点など不変集合に付随する共鳴現象との関わりで研究した。とくに、偶数次元の解析的ベクトル場が楕円型平衡点の近傍で、平衡点の共鳴度に応じた個数の第一積分と可換なベクトル場をもつならば、解析的なポアンカレ-デュラック標準化が可能であることを示した。これは先行研究の仮定を部分的に一般化した上で別証明を与えたものになっている。また、共鳴度に応じた個数の第一積分をもつ超可積分な解析的シンプレクティック写像では、線形部分に半単純性を課すことなく、解析的バーコフ標準化ができることを示した。

研究成果の概要(英文)：We studied various problems concerning the global structure of solutions for integrable systems and superintegrable systems possessing larger number of integrals. The resonance among eigenvalues of linearized dynamics associated with invariant sets such as equilibria played an important role in this study. In particular, we studied an even dimensional analytic vector field near an elliptic equilibrium point and showed that there exists an analytic transformation which takes the vector field into Poincare-Dulac normal form, provided that there exist a sufficient number (associated with the resonance degree) of integrals and commuting vector fields. This gives an alternative proof of a known result under weaker assumptions in a special case. Also, we succeeded in showing that a superintegrable symplectic map can be taken analytically into Birkhoff normal form without assuming semi-simplicity of its linear part.

研究分野：力学系理論

キーワード：可積分系 共鳴 超可積分系 シンプレクティック写像 標準形理論

## 1. 研究開始当初の背景

古典力学の運動を記述するハミルトン力学系の中において、十分な個数の第一積分をもつ系は可積分系と呼ばれ、天体力学の方程式に代表される多くの興味深い系が可積分系の摂動の形で与えられる。その意味で、可積分系の解の大域的構造の理解は重要な問題である。可積分系の解は第一積分のレベル集合上を動くが、このレベル集合のつくるモーメント写像は一般に特異点をもつので、それらの特異点の近傍における解の構造を幾何学的に深く理解することが解の大域的構造研究の鍵である。

このような特異点近傍における解の挙動は、パーコフ標準形を用いて調べられることから、可積分性とパーコフ標準化の関係の理解が基本的な問題になる。これについては、非共鳴平衡点(特異点)の場合に、解析的な可積分系での解析的パーコフ標準化を示した本研究代表者による結果や滑らかな関数の範疇における L.H. Eliasson による結果が知られていたが、2005 年に N.T. Zung は解析的な可積分系では一般の共鳴平衡点においてもそのような解析的パーコフ標準化ができることを示した。しかしながら、このときのパーコフ標準形は一般に求積可能性を意味せず、解構造の解明とは言い難い。

本研究代表者は、共鳴平衡点においても求積可能なパーコフ標準形を得ることをめざして、本研究開始に先立つ数年前から研究を行っており、自由度  $n$  の(相空間が  $2n$  次元の)ハミルトン系が共鳴度  $q$  の共鳴平衡点の近傍において、 $n+q$  個の第一積分をもつならば、そのベクトル場は解析的パーコフ標準化ができることを示し、その結果を上記のハミルトン系の特異点近傍での解構造の研究に応用した部分的成果を得ていた。これは、いわゆる超可積分系に対するパーコフ標準化の研究であり、退化した可積分系での解構造の理解の深化をめざしたものであった。

また、ハミルトン系とは限らない一般のベクトル場について、Bogoyavlenski は上記の(Liouville の意味での)可積分性を拡張し、可換なベクトル場と第一積分の存在によって可積分性を定義している。この意味での可積分な解析的ベクトル場に対しても、Zung による上記の結果が拡張され、解析的ポアンカレ-デュラック標準化ができることが知られているが、上に述べたのと全く同様に、それは求積可能性を意味するものではなかった。これに対しても、本研究代表者は、ベクトル

場の超可積分性とは何か?という観点から研究を始め、部分的成果を得ていた。

本研究では、これらの研究をさらに発展させるとともに、その摂動問題の新たな展開をめざしたものである。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、(i) 可積分ハミルトン系を十分な個数の第一積分の存在によって捉え、それら第一積分のつくる写像の特異点近傍における標準形を通じて、可積分系の大域的な解構造の幾何学的理解をめざすこと、および(ii) 一般の可積分ベクトル場の共鳴平衡点の近傍での標準化問題を超可積分性の観点から追求すること、さらには(iii) 可積分ハミルトン系の摂動(近可積分系)に対する解の安定性・不安定性を追求することにある。これらの研究は近可積分系の準周期解の存在に関するKAM理論に現れる小分母の問題に深く関わっており、可積分系の研究を通じて共鳴現象のより深い理解をめざしたものである。以上の目的のために、本研究ではとくに以下の問題に取り組む。

(1) 超可積分ハミルトン系の一般の特異点近傍で、求積可能な標準形を求めることによって、そこでの解構造を明らかにする。それによって、可積分系の解の大域的構造の理解をめざす。

(2) ハミルトン系以外の一般のベクトル場の超可積分性を、可換なベクトル場と第一積分の個数によって規定し、平衡点における解析的標準化変換が存在するための条件を調べ、これによりLiouville および Bogoyavlenski の意味での可積分性とは異なる「非可換な可積分性」を追求する。

(3) 超可積分ハミルトン系の摂動に対する準周期軌道の存在問題、すなわちKAM理論をパーコフ標準形の摂動の枠組で展開する。さらに、超可積分系の不変トーラスの摂動に対する安定性・不安定性を理論的にも数値的にも調べ、超可積分系という退化した可積分系の摂動問題の新たな進展をめざす。

## 3. 研究の方法

本研究を進めるための方法としては、個人研究が基礎になるが、それを推進していくためには、研究代表者と分担者ならびに連携研究者の間の緊密な研究連絡、および国内外の研究者との情報交換が不可欠である。また、ヨーロッパにはハミルトン力学系の研究者

が多く、それらの研究者を訪問し討論を行うことや、国際研究集会に参加し自らの成果を発表し批評を受けること、ならびにそれらの機会を利用して研究情報の交換を行うことは、本研究を進めて行く上できわめて重要なものである。

以上の観点から、研究分担者および連携研究者とは、国内での研究集会等の機会を利用してさまざまな討論を行ったほか、京都、金沢を相互訪問する機会をもった。また、2013年6月と2015年6月にはローマ第三大学のL. Chierchia 教授、2016年6月と12月にはニース大学のL. Stolovitch 教授を相互に訪問し、セミナーと研究討論を行った。さらに、2017年3月にはパリ第七大学のL.H. Eliasson 教授を日本に招聘し本研究に関する研究討論を行うとともに、第6回「ハミルトン系とその周辺」を京都大学で開催し、本研究に深く関わるKAM理論に関する研究討論を行った。

また、2015年6月にはポーランドのBedlewoにあるパナッハセンターでの国際研究集会に、2016年6月にはフランスのストラスブルグにあるIRMAにおける国際研究集会に招かれ、成果発表を行うとともに、研究集会参加者との研究討論を行った。

#### 4. 研究成果

(1) 超可積分ハミルトン系の特異点における標準形を得るためには、系に対して自然と定義される“ポアンカレ写像”のバーコフ標準化が出発点になる。研究代表者はこれについて以前より、 $2n$ 次元ユークリッド空間の原点を共鳴度 $q$ の不動点にもつ解析的シンプレクティック写像 $f$ が $n+q$ 個の独立な第一積分をもつならば、解析的バーコフ標準化が行えることを示していた。しかし、そのために $f$ の線形部分についての半単純性を仮定する必要があった。本研究で、この半単純性を取り除くことに成功した。すなわち、上記の意味での超可積分性は自動的に線形部分の半単純性を導くことを証明した。これはハミルトンベクトル場の場合の結果と全く同じ結果がシンプレクティック写像でも成り立つことを示したもので、きわめて自然なものになっている。これにより、可積分系に対する基本定理(Liouville-Arnoldの定理)に現れる作用-角変数とバーコフ標準化に付随したバーコフ変数を合わせたシンプレクティック座標によって解の求積が可能になることが示された。

(2) 一般の解析的ベクトル場の共鳴平衡点の近傍におけるポアンカレ-デュラック標準化については、適切な超可積分性の定義という観点からは満足できる結果が得られなかったが、その研究の過程でポアンカレ-デュラック標準化に関する先行研究結果の別証明を得ることに成功した。すなわち、 $2n$ 次元ユークリッド空間において原点を平衡点にもつ解析的ベクトル場 $X$ が正負ペアの固有値をもつとし(実の場合なら楕円型平衡点が典型例)、平衡点の共鳴度が $q$ であるとする。このとき、もし $X$ と可換な $n-q$ 個の独立な解析的ベクトル場 $X_1 (=X), X_2, \dots, X_{n-q}$ が存在し、かつそれらが共通の $n+q$ 個の独立な解析的第一積分をもつならば、標準形が求積可能であるような収束ポアンカレ-デュラック標準化ができることを証明した。

L. Stolovitchによる先行研究は、可換な解析的ベクトル場の組に対して、求積可能な標準形への形式的変換が存在するならば(必要ならば適当な付加条件のもとで)、解析的標準化が可能になることを示したものである。これに対して、上記の結果は平衡点を特別な型に制限し、第一積分の存在を利用することによって別証明を与えるとともに、求積可能な標準形がいかなる場合に実現されるかを明らかにしたものになっている。ここで課された平衡点の型に対する制限は、力学系の観点からは最も興味深いクラスではあるが、結果としての自然さという意味では、より一般的な型の場合に拡張されてしかるべきであり、それは今後の課題である。なお、この結果では $n-q$ 個のベクトル場 $X_1, X_2, \dots, X_{n-q}$ は互いに可換である必要はない。その意味で「可換なベクトル場」の存在を、部分的に「共鳴度に合致する個数の第一積分の存在」という力学系的観点からの条件で置き換えた形になっている。この意味で超可積分なベクトル場の研究を、非可換な可積分性の観点と共鳴現象の観点から推進することも今後の課題と考えられる。

(3) 研究分担者はハミルトン系の可積分性の問題を衝突特異点の正則化を通じて捉えるという新しいアプローチを提言し、同次ポテンシャルをもつ自由度2の解析ハミルトン系がハミルトニアン以外の解析的第一積分をもたないための十分条件を与えることに成功した。この成果は衝突多様体理論の新しい応用の方向を与えるものになっており、可積分性のもたらす必要条件を解の解析接続の観点から述べたMorales-Ramis理論と

は異なり, 実力学系理論に基づくものとなっている。

(4) 連携研究者は Morales-Ramis 理論 (の Ayoul と Zung による一般化) を応用することにより, ハミルトン系とは限らない一般の微分方程式系が Bogoyavlenski の意味で可積分になるための必要条件を, 系が平衡点およびそれに付随するヘテロ (ホモ) クリニック軌道をもつ場合に研究した。そして, 直交変分方程式のつくるモノドロミー群の任意の元 (モノドロミー行列) が同時対角化できる状況が実現することを示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

K. Yagasaki and S. Yamanaka : Nonintegrability of dynamical systems with homo- and heteroclinic orbits, J. Differential Equations 査読有 Vol. 263, No. 2, (2017), 1009-1027.  
DOI: 10.1016/j.jde.2017.03.006

H. Ito : Some remarks on integrability and normal forms for vector fields, RIMS Kōkyūroku Bessatsu, 249-264.  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html>

M. Shibayama : Non-integrability criterion for homogeneous hamiltonian systems via blowing-up technique of singularities, Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A, 査読有, Vol. 35 (2015), 3707-3719.  
DOI: 10.3934/dcds.2015.35.3707

[学会発表] (計 10 件)

山中祥五, 矢ヶ崎一幸: ホモ/ヘテロクリニック軌道を有する一般的な微分方程式の非可積分性, 日本数学会秋期総合分科会, 函数方程式論分科会, 2016 年 9 月 15 日, 関西大学 (大阪府・吹田市)。

H. Ito: Poincaré center problem and normal form theory of vector fields, 97<sup>th</sup> Encounter between Mathematicians and Theoretical Physicists “Around Poincaré,” 2016 年 6 月 2 日, Institut de Recherche Mathématique Avancée (IRMA), Strasbourg (France)。

柴山允瑠: n 体問題の周期軌道の変分

解析, 日本数学会 2016 年度年会 函数方程式論分科会, 2016 年 3 月 16 日, 筑波大学 (茨城県・つくば市)。

柴山允瑠: 特異点のブローアップと標準形理論の応用による第一積分の個数の評価, 天体力学 N 体力学研究会, 2015 年 12 月 25 日, SMBC イベントスペース (千葉) (千葉県・千葉市)

H. Ito: Integrable and superintegrable vector fields and their normal forms at equilibria, International conference on Dynamics, Topology and Computations, 2015 年 6 月 17 日, Banach Center, Bedlewo (Poland)。

伊藤秀一: Resonance phenomena and normal form theory in dynamical systems, 第 10 回「代数幾何解析セミナー」研究集会, 2015 年 2 月 16 日, 鹿児島大学理学部 (鹿児島県・鹿児島市)。

伊藤秀一: Some aspects of integrability of vector fields and normal form theory, RIMS 研究集会 “Several aspects of microlocal analysis,” 2014 年 10 月 24 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府・京都市)。

伊藤秀一: Some open questions in Hamiltonian dynamical systems, 第 5 回「ハミルトン系とその周辺」研究集会, 2014 年 5 月 31 日, 金沢大学サテライトプラザ (石川県・金沢市)。

柴山允瑠: 特異点のブローアップによるハミルトン系の可積分性の判定, 日本数学会 2014 年度年会 無限可積分系セッション, 2014 年 3 月 18 日, 学習院大学 (東京都・豊島区)。

伊藤秀一: Birkhoff normalization of commuting maps associated with super-integrable systems, 「KAM 理論とその周辺」研究集会, 2013 年 6 月 20 日, 金沢大学サテライトプラザ (石川県・金沢市)。

[図書] (計 1 件)

柴山允瑠: 重点解説 ハミルトン力学系-可積分系と KAM 理論を中心に-, SGC ライブラリ 130, サイエンス社, 2015 年 12 月, 171 ページ。

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

伊藤 秀一 (ITO, Hidekazu)  
金沢大学・数物科学系・教授  
研究者番号: 90159905

(2)研究分担者

柴山 允瑠 (SHIBAYAMA, Mitsuru)

京都大学・情報学研究科・准教授

研究者番号：40467444

(3)連携研究者

矢ヶ崎 一幸 (YAGASAKI, Kazuyuki)

京都大学・情報学研究科・教授

研究者番号：40200472