様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２１ 日現在

機関番号： １４３０１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2013～2015
課題番号： ２５４００１１０

研究課題名（和文） 離散可積分系による古典直交多項式の理論とその応用

研究課題名（英文） Theory of classical orthogonal polynomials in terms of discrete integrable systems and its applications

研究代表者
辻本　諭（TSUJIMOTO, SATOSHI）

京都大学・情報学研究科・准教授

研究者番号：６０２８７９７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：離散可積分系の理論を用いることで古典直交多項式の研究を進めた。特に、古典直交多項式の一般化である例外型直交多項式に対して、漸化式の導出に成功した。また、Bannai-Ito代数について、その応用とともに明らかにした。関連するBannai-Ito多項式においても、一般化ダルブー変換を用いることで、例外型直交多項式類似を導入するなどした。さらに、オートマトンを用いることで、箱玉系などの超離散可積分系を定式化し、オートマトンの理論を用いた新しい解析手法を提案した。

研究成果の概要（英文）：By using the theory of integrable systems, we study the classical orthogonal functions. In this study, we have succeeded in deriving the recurrence relations for the exceptional orthogonal polynomials as a generalization of the classical orthogonal polynomials. The Bannai-Ito algebra is also presented together with some of its applications. In its relations with the Bannai-Ito polynomials, an exceptional orthogonal polynomial analogue is introduced by using the generalized Darboux transformations. We also formulate integrable ultradiscrete systems like box-ball system in the language of automata, and then study using the methods standard in automata theory.

研究分野： 直交多項式、離散可積分系

キーワード： 力学系・可積分系　直交多項式　特殊関数　古典直交多項式　例外型直交多項式　箱玉系　オートマトン

１．研究開始当初の背景

古典直交多項式は、古典解析学における中心的な題材であり、19 世紀、Chebyshev らによって直交多項式の考え方が確立する当初から、理論と応用の両面において重要な役割を果たしてきた。近年，古典直交多項式の一般化として、Jacobi 多項式あるいは Krawtchouk 多項式などを手がかりに様々な例が提案されてきている。その中でも広範な分野への応用が可能な、例外型直交多項式,歪直交多項式、多重直交多項式、-1 直交多項式などは、特に精力的に調べられている。しかしながら、それら直交関数系の全体像は明らかにはされておらず、未だ多くの問題が残されている状況である。

可積分な連続系および離散系と古典直交多項式を含めた特殊関数との関連性は次々と明らかにされている一方で、現在多くの研究者の注目を集めている箱玉系と特殊関数との関連性については、いわゆる超離散極限で得られる区分線型な関数系が知られるのみである。雛形となるべき例が未だなく、体系的な議論も整備されてはいない。また、超離散化の手続きは離散系において減算なしで時間発展を決める手続きに対応しており、この離散系の減算なしの表示は、数値計算において安定性にかかわる大切な性質であり、重要な研究課題である。

２．研究の目的

現在、活発に議論されている古典直交多項式とその一般化に関して、離散可積分系の立場からその多様な性質を明らかにし、新たな特徴付けを与える。これにより，直交多項式を含めた特殊関数に関連する諸分野を横断的に研究する新しい古典解析的方法論を確立することが目的である。

３．研究の方法

本研究の目的を達成するために、離散可積分系の理論を用いることで古典直交多項式とその一般化に対して対称性および代数的観点から解析を深める。特に，例外型直交多項式を端緒として、一般化された古典性に関して Askey-Wilson 多項式も含め、統一的な特徴付けを与える。さらに、一般化された古典直交多項式と離散可積分系との関連性を多面的に考察することにより、量子力学における超可積分性、箱玉系のスペクトル、数値計算アルゴリズムなどの解析を行う。これら具体的な研究課題を効率的に進めていくために、離散可積分系と古典直交多項式・箱玉系とオートマタ群・数値計算アルゴリズムの３つの国際的な研究グループを構成し、互いに緊密な連絡をとる。

４．研究成果

本研究の成果としては、主に以下のものがあげられる。広田のタウ関数などの可積分系の理論と直交多項式の理論を用いることで、古典直交多項式とその一般化について理論的解析を進めた。特に、古典直交多項式の一般化として、近年注目を集めている例外型直交多項式について、ダルブー変換との関係や、漸化式の構造について、明らかにすることに成功している。また、鏡映演算子と一階の差分演算子からなるDunkl型作用素の多項式固有関数として特徴付けられる Bannai-Ito 多項式についても、その例外型直交多項式の導出を与えた。さらに、超離散可積分系とオートマタ群との関係を調べるなかで、運搬車付き箱玉系と点灯夫群のそれぞれに対応するランダムウォークのスペクトルが一致することを見出した。

(1)　（離散可積分系と直交多項式）
離散可積分系と直交多項式の対応関係について、具体例を挙げて明らかにした。ここではまず、直交多項式とその一般化について述べ、対応する可積分系を明らかにしている。さらに、直交多項式やその一般化に関連する最近の話題として、数値計算、実験計画法、ランダム行列、ASEP、出生死滅過程、量子状態転送、Painleve 方程式、超離散系を取り上げて議論した。

(2)　（非自励離散可積分系　RII 型格子）
ある種の一般化固有値問題の固有関数として現れる対称型 RII 多項式について、そのスペクトル変換の理論について議論した。この理論を議論するにあたって、非自励離散変形 KdV(nd-mKDV)方程式と RII 格子方程式との関係を明らかにした。この中で半無限格子上の nd-mKdV 方程式のハンケル行列式解を与えることに成功した。

(3)　（Bannai-Ito 代数とその応用）
Bannai-Ito 多項式は、鏡像変換と一階差分からなる Dunkl 作用素の多項式固有関数であり、現在、活発な議論がなされているところである。この基本的な性質などを調べる中で付随する代数として Bannai-Ito 代数が導入された。この Bannai-Ito 代数の複数の応用について、議論を深めた。特に、Bannai-Ito 多項式との関係、sl−1(2)代数に付随する Racah 問題、鏡映演算子を用いて表される超可積分系などについて取り上げて議論した。

(4)　（例外型直交多項式）

Gomez-Kamran-Milson, Odake-Sasaki らによって多くの具体例が知られるようになってきたが,それらは個別的な解析が主であり、それらを古典直交多項式に付随する２階の微分作用素の準多項式固有関数について考察することで、Darboux 変換の理論によって統括的に扱う手法を進展させた。

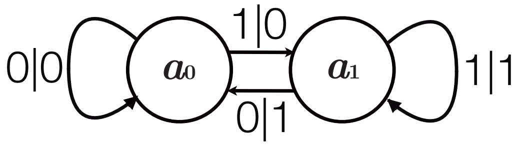
(5) （例外型直交多項式の漸化式）
古典直交多項式の理論おいて重要な古典性について、例外型直交多項式に対して議論することは重要だが不十分な議論しかなされていなかった。特に双対性の議論で重要な漸化式構造については、

$$\left(\int p_j(x)dx\right) Q_n(x) = \sum_{k=n-j-1}^{n+j+1} \beta_{n,k} Q_k(x).$$

あまり深い考察がなされてこなかった。ここでは、従来知られていなかった例外型直交多項式の満たす漸化式を与えることに成功した。これは、複数の型が存在することが知られている全ての型の例外型に適用であり、X1 型 Jacobi 多項式, X2 型 Jacobi 多項式など、Laguerre 多項式や Hermite 多項式についても具体的な漸化式の表示を与えた。

(6) （直交多項式理論の数値計算アルゴリムへの応用）
三重対角行列束による一般化固有値問題を解くアルゴリズムを提案した。このアルゴリズムは、三重対角行列束の特性多項式の零点集合上で直交性を有する直交多項式列を考え、付随する非自励離散可積分系の時間発展を用いることで構成することが可能となる。また、離散可積分系の初期値問題の厳密解を用いることで、アルゴリズムの収束性も示される。

(7) （オートマトンの解析手法の開発）
可積分系における箱玉系は、高橋・薩摩によって 1990 年に発見されたソリトンセルオートマトンの一つであり、その後の超離散化手法の確立へと繋がり、現在もなお発展している重要なモデルである。また, オートマタ群と呼ばれる分野においても活発な研究活動がなされている。オートマタ群に関連する問題として Burnside 問題、Milnor 問題、Atiyah 問題などがあり 、Aleshin-Grigorchuk 群、点灯夫(Lamplighter) 群などのオートマタ群によって解かれてきた。これまで個別の分野として発展してきた箱玉系とオートマタ群の各理論を相補的にとらえ関連付けることを試みた。特に、オートマタ群で用いられる手法を箱玉系に適用することで新しい箱玉系の解析手法を提案した。具体的には、まず、運搬車付き箱玉系の時間発展ルールをオートマトンによって記述した。その上で点灯夫群の解析で用いられていたグラフ上のスペクトル解析を箱玉系に導入した。特に、運搬車容量１の箱玉系の時間発展が平行移動によって与えられる場合（下図 : 対応するオートマトン図形）、対応する確率行列のスペクトルが厳密に計算可能であることを明らかにし、点灯夫群のそれと完全に一致することを見出した。運搬車容量２以上の場合においても、点灯夫群の場合との類似性を数値的に見出し、スペクトル分布に関する予想を与えた。



５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 9 件）

① T. Kato and S. Tsujimoto and A. Zuk, Spectral analysis of transition operators, Automata groups and translation in BBS, to appear in *Communications in Mathematical Physics*, arXiv: 1406.5557 [math.SP]. 査読有.

② K. Maeda and S. Tsujimoto (July 2016) A generalized eigenvalue algorithm for tridiagonal matrix pencils based on a nonautonomous discrete integrable system, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **300**, pp.134-154, å doi:10.1016/j.cam.2015.12.032. 査読有.

③ H. Bie, V. Genest, S. Tsujimoto, L. Vinet and A. Zhedanov (April 2015) The Bannai-Ito algebra and some applications, *Journal of Physics: Conference Series* **597**, conference 1, 12001, doi:10.1088/1742-6596/597/1/012001. 査読有.

④ H. Miki and S. Tsujimoto (March 2015) A new recurrence formula for generic exceptional orthogonal polynomials, *Journal of Mathematical Physics* **56**, 033502, doi:10.1063/1.4914334. 査読有.

⑤ M. Derevyagin, S. Tsujimoto, L. Vinet and A. Zhedanov (August 2014) Bannai-Ito polynomials and dressing chains, *Proceedings of the American Mathematical Society* **142**, pp.4191-4206, doi:10.1090/S0002-9939-2014-12165-4. 査読有.

⑥ S. Tsujimoto, T. Kato and A. Zuk (June 2014) Automata groups and box-ball systems (オートマタ群と箱玉系), *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B47**, pp.163-170, NAID:110009850991. 査読有.

⑦ K. Maeda and S. Tsujimoto (2013) Direct connection between the RII chain and the nonautonomous discrete modified KdV lattice, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* ***9***, *073 (12pages),* doi:10.3842/SIGMA.2013.073.査読有.

⑧ S. Tsujimoto (August 2013) Construction of the exceptional orthogonal polynomials and its application to the superintegrable system, in: *The breadth and depth of nonlinear discrete integrable systems, ed. T. Tokihiro, RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B41**, pp.181-205, NAID:110009631933. 査読有.

⑨ 前田一貴, 三木啓司, 辻本 諭 (2013) 直交多項式理論からみえてくる可積分系, 日本応用数理学会論文誌 **23**, pp.341-380, NAID:110009616467. 査読有.

〔学会発表〕(計 3 件)

① S. Tsujimoto, A systematic construction of the exceptional orthogonal polynomials, The XXInd International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries, 2013/06/11-16, Prague, Czech.

② S. Tsujimoto, On the exceptional Bannai-Ito polynomials, CRM-ICMAT workshop on exceptional orthogonal polynomials and exact solutions in mathematical physics, 2014/09/07-12, Segovia, Spain

③ 辻本諭, 例外型 Bannai-Ito 多項式, 日本数理学会, 2015/09/14, 京都産業大学（京都府・京都市北区）

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ

http://www-is.amp.i.kyoto-u.ac.jp/lab/tujimoto

６．研究組織

(1)研究代表者

辻本 諭（Tsujimoto Satoshi）

京都大学・大学院情報学研究科・准教授

研究者番号：６０２８７９７７

(2)研究分担者

中村 佳正（Nakamura Yoshimasa）

京都大学・大学院情報学研究科・教授

研究者番号：５０１７２４５８

(3)連携研究者

加藤 毅（Kato Tsuyoshi）

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：２０２７３４２７