

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 8 月 7 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400112

研究課題名(和文)非双曲力学系の非自明遊走領域の存在に基づく研究の新しい枠組みの構築

研究課題名(英文)Historic behavior for non-trivial wandering domains: proof of Colli-Vargas' conjecture & answer to Takens' last problem)

研究代表者

桐木 紳 (Kiriki, Shin)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：50277232

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：Colli-Vargas の非自明遊走領域に関する予想[Ergod. Th. Dynam. Sys. 21 (2001) 1657--1681]が正しいことを証明し、さらにその非自明遊走領域がヒスリック軌道を持つことを明らかにした。これはTakensの公開問題 [Nonlinearity 21 (2008) T33--T36.]の肯定的な解であり、非双曲力学系の新しい発見でもある。またこれ結果はvan Strienのエノン写像系の非自明遊走領域に関する公開問題の1つ [Discrete Contin. Dyn. Syst. 27(2010) 557-588]の近似解も与えている。

研究成果の概要(英文)：We give an answer to a smooth version of the open problem of Takens in [Nonlinearity 21 (3) (2008) T33--T36.] which is related to historic behavior of dynamical systems. To obtain the answer, we show the existence of non-trivial wandering domains near a homoclinic tangency, which is conjectured by Colli-Vargas [Ergod. Th. Dynam. Sys. 21 (2001) 1657--1681]. Concretely speaking, it is proved that any Newhouse open set in the space of smooth diffeomorphisms on a closed surface is contained in the closure of the set of diffeomorphisms which have non-trivial wandering domains whose forward orbits have historic behavior. Moreover, this result implies an answer in the smooth category to one of the open problems of van Strien [Discrete Contin. Dyn. Syst. 27 (2) (2010) 557--588] which is concerned with wandering domains for Henon family.

研究分野：力学系

キーワード：ホモクリニック分岐 ヒスリック性 エノン写像系 非双曲力学系 非自明遊走領域 双曲性

1. 研究開始当初の背景

多様体 M 上の力学系 $\varphi : M \rightarrow M$ の前方軌道 $\{x, \varphi(x), \varphi^2(x), \dots\}$ が **historic behavior** を持つとは、Birkhoff 平均の極限

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \delta_{\varphi^i(x)}$$

が弱位相で極限値を持たないことである（ここで $\delta_{\varphi^i(x)}$ は $\varphi^i(x)$ を台とする X 上の Dirac 測度である）。Birkhoff のエルゴード定理から直ちに「 φ によって保存される M 上の測度 μ が存在するならば、その測度に関し、 M のほとんど全ての点 x の前方軌道は historic behavior を持たない」という系が得られる。

2. 研究の目的

しかしこの Birkhoff のエルゴード定理から得られた結果は M の Lebesgue 測度については何も言っていない。ゆえに物理的な観点から次の問いは重要である。

Takens の最終問題 ([Nonlinearity, 21(2008), T33–T36]). Historic behavior を持つような軌道の初期点集合の Lebesgue 測度が正になるような可微分力学系の persistent class は存在するのか？

この研究の目的はこの問題を解決することであった。

3. 研究の方法

$\text{Diff}^r(M)$ の部分集合 X に対して部分集合 $Y \subset X$ が persistent class であるとは、閉包 \bar{Y} が X を含むことである。（さらに、 Y が X の開集合であるとき、 Y は robust class とよばれる。）我々は 2 次元 C^r ($2 \leq r < \infty$) 級微分同相写像系に関して、この Takens の最終問題に対し肯定的な解を得た。具体的には、この解を得るために、次の遊走領域に関する予想を証明し、さらにその遊走領域が historic behavior を持つことを示した。

Colli-Vargas の予想 (Ergod. Th. Dynam. Sys., 21(2001), 1657–1681, §2)]. 2 次元ホモクリニック接触を持つ微分同相写像は非自明な遊走領域を持つ微分同相写像で C^r 近似できるであろう。

ここで微分同相写像 f のホモクリニック接触とは、 f の双曲集合 Λ の安定多様体 $W^s(\Lambda, f)$ と不安定多様体 $W^u(\Lambda, f)$ が非横断的な交点のことである。また空でない連結開集合 $D \subset M$ は次の条件をみたすとき、 f の**遊走領域**とよばれる。

- 相異なる整数 $i, j \geq 0$ に対して $f^i(D) \cap f^j(D) = \emptyset$ であり、かつ
- ω 極限集合の和集合 $\omega(D, f) = \bigcup_{x \in D} \omega(x, f)$ が周期軌道ではない。

また遊走領域が**縮小的**であるとは、 $f^n(D)$ の直径が $n \rightarrow \infty$ としたとき 0 に収束することをいう。ちなみに沈点の吸引領域には縮小的かつ遊走領域が存在することは自明である。一方、よく知られた自明でない縮小的遊走領域もつ微分同相写像として「Denjoy の反例」がある。これは ω 極限集合が Cantor 集合であるような S^1 上の C^1 無理数回転である。ホモクリニック接触を持つ 2 次元微分同相写像は $\text{Diff}^r(M)$ ($r \geq 2$) で空でない開集合をなすことが Newhouse によって示されたので、ホモクリニック接触を持つ 2 次元微分同相写像の集合は Newhouse 開集合とよばれる。ゆえに Colli-Vargas 予想は『 C^r Newhouse 開集合で非自明遊走領域を持つ微分同相写像は稠密である』と言い換えることができる。

4. 研究成果

我々は本研究において上の予想が正しいことを証明することに成功した。さらに Takens の最終問題に対する解答が与えられた。それが次の定理である。

定理 A. M を閉曲面とし、 \mathcal{N} を $\text{Diff}^r(M)$ ($2 \leq r < \infty$) の Newhouse 開集合とする。このとき、 \mathcal{N} の稠密集合が存在し、その任意の元 f は次の条件をみたす縮小的遊走領域 D をもつ。

- (1) $\omega(D, f)$ は自明でない双曲集合を含む。
- (2) 任意の $x \in D$ の f に関する前方軌道は historic behavior をもつ。 \square

この結果を、ホモクリニック接触を起こすことが知られている Hénon 写像族 $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx)$$

(但し a, b は実パラメータ) に適用することができる。

Van Strien の公開問題 ([Discrete Conti. Dynam. Sys., 27(2010), 557–588]). Hénon 写像族は非自明遊走領域を持ち得るか？

定理 A の系として、この問題に関連した次の結果が得られた。

定理 B. Hénon 写像族のパラメータ空間の開集合 \mathcal{O} で、その閉包が $(2, 0)$ を含み、かつ次の条件をみたすものが存在する。任意の $(a, b) \in \mathcal{O}$ に対して $f_{a,b}$ は、縮小的な非自明遊走領域 D をもつ微分同相写像で C^r 近似 ($2 \leq r < \infty$) される。 \square

以上の結果の詳しい説明とそれらの証明は、論文 [1] として出版した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 4 件)

- [1] S. Kiriki & T. Soma, Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains, *Adv. Math.* **306** (2017), 524–588.
- [2] S. Kiriki, M.-C. Li, & T. Soma Geometric Lorenz flows with historic behavior, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **36-12** (2016), 7021–7028.
- [3] S. Kiriki, L. J. Díaz & K. Shinohara, Blenders in center unstable Hénon-like families: with an application to heterodimensional bifurcations *Nonlinearity* **27-3** (2014) 353–378.
- [4] S. Kiriki & T. Soma, Existence of generic cubic homoclinic tangencies for Hénon maps, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **33-4** (2013), 1029–1051.

[学会発表] (計 16 件)

- ① 2017, 5/24–5/27, 2017 NCTS Workshop on Dynamical Systems (National Center for Theoretical Sciences, 台湾) 招待講演「Historic Behavior for Non-trivial Wandering Domains」
http://www.ncts.ntu.edu.tw/events_2_detail.php?nid=135
- ② 2017, 3/24, 日本数学会 トポロジー分科会 (首都大学東京) 講演「ホモクリニック接触と非自明遊走領域: Takens 最終問題の解・Colli-Vargas 予想の証明」

- ③ 2017, 3/13–3/17, Kanto Dynamics Days 2017 (東京大学) 招待講演「Historic behavior for non-trivial wandering domains: Proof of Colli-Vargas' conjecture & Answer to Takens' last problem」
<http://www.math.keio.ac.jp/~hiroki/KDD2017.html>
- ④ 2017, 2/2–2/4, Seminars on Dynamical Systems (Centro de Mathematica University of Porto, ポルトガル) 招待講演「Existence of wandering domains and historic behavior I: a proof of Colli-Vargas conjecture」
<https://cmup.fc.up.pt/main/node/>
- ⑤ 2017, 1/7–10, 京都力学系セミナー (日本大学 軽井沢研修所) 講演「ヘテロ次元サイクルと非自明遊走領域の存在について」
- ⑥ 2016, 10/28, 京都力学系セミナー (京大 6 号館 609 号室) 講演「ヘテロ次元サイクルと非自明遊走領域の存在について」
<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/ja/event/seminar/1435>
- ⑦ 2016, 3/21–25, Seminar of Dynamical Systems (Universidade de Sao Paulo ブラジル) 招待講演「Toward the solution of Takens' Last Problem: Robust historic behavior for wandering domains」
<https://www.ime.usp.br/~vargas/english/eevargas.html>
- ⑧ 2015, 7/10, 京都力学系セミナー (京大 6 号館 609 号室) 講演「Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains: Linking lemma, critical chain, non-trivial wandering domains」
<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/ja/event/seminar/959>
- ⑨ 2015, 5/30–6/8, ICTP-ESF-School and Conference in Dynamical Systems (イタリア・トリエステ) 講演講演「Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains」
<http://indico.ictp.it/event/a14293/>

- ⑩ 2015, 3/12, 2015 NCTS Workshop on Dynamical Systems (National Center for Theoretical Sciences Mathematics Divison, 台湾) 招待講演「Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains」
http://www.ncts.ntu.edu.tw/events_2_detail.php?nid=44
- ⑪ 2015, 3/12, DynamIC Workshops: An Afternoon on Henon Dynamical Systems (Imperial College London, 英国) 招待講演「Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains」
<http://wwwf.imperial.ac.uk/~tclark/henon.html>
- ⑫ 2015, 1/10, 冬の力学系研究集会 (日本大学 軽井沢研修所) 講演「Existence of nontrivial wandering domains near homoclinic tangencies : proof of Colli-Vargas' conjecture」
- ⑬ 2014, 3/16, 日本数学会 トポロジー分科会 (学習院大学) 講演「Blenders in center unstable Hénon-like families: with an application to heterodimensional bifurcations」
- ⑭ 2014, 1/11, 冬の力学系研究集会 (広島大学) 講演「Blenders in center unstable Hénon-like families: with an application to heterodimensional bifurcations」
- ⑮ 2014, 3/22, 日本数学会 トポロジー分科会 (京都大学) 講演「 C^2 -robust heterodimensional tangencies」
- ⑯ 2013, 1/14, 冬の力学系研究集会 (日本大学 軽井沢研修所) 講演「 C^2 -robust heterodimensional tangencies and critical cycles」

6. 研究組織

(1) 研究代表者

桐木 紳 (KIRIKI, Shin)
東海大学・理学部・教授
研究者番号：50277232

(2) 研究分担者

相馬 輝彦 (Soma, Teruhiko)
首都大学東京・理工学研究科・教授
研究者番号：50154688