

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 31 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400116

研究課題名(和文)作用素関数の研究と多項式・作用素摂動への応用

研究課題名(英文)The study of operator monotone functions and its application to polynomials and operator perturbation

研究代表者

内山 充(Uchiyama, Mitsuru)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：60112273

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：Jacobi 作用素のレゾルベントを単位ベクトルに作用させたベクトル関数と単位ベクトルとの内積は作用素単調関数になることは既知である。逆に全ての作用素単調関数をこのように内積表示できることを証明した。

次に、Loewner-Heinz 不等式と呼ばれる命題の逆命題が成立するための条件を恒等作用素の摂動を用いて与えた。この結果についての論文は Proceeding of the Edinburgh Math. Soc. から出版された。そしてこの結果に関連した2編の論文が共著論文として出版された。更に、作用素環における正值線形写像に関する Choi conjecture を肯定的に証明した。

研究成果の概要(英文)：It is known that an inner product of a unit vector and a vector function which is a transformation of the unit vector by the resolvent of a Jacobi operator is an operator monotone function. We had conversely proved that every operator monotone function is represented by using inner product.

We next gave a condition under which the converse of the Loewner-Heinz inequality holds using the perturbation of the identity operator. The paper on this result was published from Proceeding of the Edinburgh Math. Soc. Two relevant papers to this result were published as joint works. Further we have proved the Choi conjecture on positive linear maps on  $C^*$ -algebras.

研究分野：関数解析・作用素論

 キーワード：Operator functions Operator monotone Operator convex Loewner's theorem Pick functions  
Gamma function Operator inequality

### 1. 研究開始当初の背景

実軸の区間  $J$  で定義された実数値連続関数  $f(t)$  が与えられたとき、 $J$  にスペクトルを持つすべての有界自己共役作用素(あるいは行列)  $X$  に対して  $f(X)$  が定義できる。この作用素関数  $X \rightarrow f(X)$  が

$$A \leq B \implies f(A) \leq f(B)$$

を満たすとき、 $f$  は  $J$  上の作用素単調関数と呼ばれる。同様に、この順序を用いて作用素凸(凹)関数も定義される。Löwner (Loewner) は  $J$  が开区間であるとき、 $f$  が  $J$  上の作用素単調関数であるための条件は、 $f(t)$  が複素平面の上半平面  $P_+$  に正則拡大  $f(z)$  を持ち  $f(P_+) \subset P_+$  であることを証明した。このような正則関数  $f(z)$  は Pick 関数あるいは Nevanlinna 関数と呼ばれポレル測度を用いて積分表現できる。また、 $g(t)$  が作用素凸であるための必要十分条件は  $J$  の任意の点  $a$  について商  $(g(t)-g(a))/(t-a)$  が作用素単調である。

$f(t)=t^a$  ( $0 < a < 1$ ) が区間  $[0, 1]$  における作用素単調関数であることは、Loewner-Heinz 不等式と呼ばれ、加藤(敏)をはじめとして多くの研究者に多方面で使われている。また、作用素エントロピー  $-X \log X$  を生成する  $-t \log t$  が作用素凹であることは梅垣等によって証明された。Kadison, Davis-Choi, Pedersen-Hansen 等による作用素凸関数(あるいは作用素単調関数)についての

Jensen 不等式はこの分野の研究に大きな進歩をもたらした。国内においても、1987年に古田氏による作用素不等式が発表され、続いて安藤氏によって関連した作用素不等式が証明された。私は作用素単調関数の概念を次のような二つの関数の間の関係に拡張した。非減少関数  $f, g$  について

$$g(A) \leq g(B) \implies f(A) \leq f(B)$$

が成立するとき、即ち、 $f(g^{-1})$  が作用素単調であるとき、 $g$  を  $f$  の majorization と言い、 $f(t) \leq g(t)$  と書く。この定義を使うと、 $f$  が作用素単調であることは、 $f(t) \leq t$  と書ける。この概念を用いることによって、上述の作用素不等式を大幅に統一的に拡張することに成功した。更にこの概念を用いて、 $(0, 1)$  におけるガンマ関数の単調増加部分の逆関数が作用素単調であることを証明していた。

### 2. 研究の目的

当研究課題の目的は、上記の結果を次のように発展させることであった。

第一の目的: 「作用素単調関数と直交多項式系, Jacobi 作用素, 連分数との関係の解明」  
作用素単調関数  $f(t)$  はポレル測度によって積分表示されるが、このポレル測度から直交多項式系も生成される。また、このポレル測度による  $L^2$  空間において直交多項式系を基底としたとき、恒等関数による掛け算作用素を行列表示した無限行列を Jacobi 作用

素と言う。この Jacobi 作用素を  $A$  とした時、 $A$  と  $f(t)$  の関係を解明することが目的であった。

第二の目的は「Loewner-Heinz 不等式の逆が成立するための条件の考察」即ち、

$$A \leq B \implies A^a \leq B^a \quad (0 < a < 1)$$

の逆が成立するための条件を構築することであった。

第三の目的は「作用素単調関数の構築と応用」であったが、変更して作用素環における正值線形写像に関する“Choi conjecture (1974)”に取り組んだ。それは次のような問題である。作用素環の間の正值線形作用素と作用素凸関数  $g$  が与えられたとき、等式

$$g(A) = g(\phi(A))$$

が全ての自己共役作用素  $A$  について成立すれば、 $g$  を任意の連続関数に取り換えても、この等式が成立することが知られていた。

Choi 氏はこの命題の仮定の  $g$  を作用素凸関数に限らず、直線以外の一般的な連続関数に拡張できるのではないかと予想した。この予想問題に取り組んだ。

### 3. 研究の方法

膨大な過去・現在の研究結果を専門書・論文を通じて学び、その idea・手法を理解しそれを駆使して目的を果たすのが基本的な方法である。上記の目的は主に達成されたのであるが、その研究手段は「微分」の駆使であった。特に、Choi conjecture の解決のために超関数論の結果を使用した。抽象的作用素論の研究分野で超関数論を使った論文を私は寡聞にして知らない。従って、このアイデアは全く独創的であった。

研究を持続的に継続するために、国内外の研究集会に出席し、成果を発表するとともに、他の研究者との意見交換を通じて motivation を高めることも大切なことであった。特に、“作用素平均理論”の権威者で連携研究者でもある幸崎氏、作用素論にも造詣が深い連携研究者の綿谷氏との研究打ち合わせのために九州大学を訪問した。また、非有界作用素環の専門家である井上氏との意見交換・情報収集のため福岡大学を訪問した。

パソコン関連機器や図書・文具類も購入した。

### 4. 研究成果

「第一の目的: 作用素単調関数と直交多項式系, Jacobi 作用素, 連分数との関係の解明」については次の結果を得た。

区間  $(-1, 1)$  上の作用素単調関数  $f(t)$  をポレル測度で表示し、そのポレル測度によって構成した Jacobi 作用素  $A$  に関して

$$f(A) = f(0) + f'(0) \int_0^1 (1-t) e^{-tA} dt \quad (e, e)$$

という関係式が成立することを示した。

この結果は J. Math. Anal. Appl. 401 (2013) で発表した。  $f(t)$  と連分数との関連については未着手である。

「第二の目的: Loewner-Heinz 不等式の逆が成立するための条件の考察」  
に関しては次の定理を得た。

“  $0 < a < 1$  を固定した時,

$$(A + t I)^a \leq (B + t I)^a$$

が全ての  $t > 0$  について成立すれば  $A \leq B$  が成立する。”

更にこの定理を作用素幾何平均等へ応用した。この結果は Proceeding of the Edinburgh Math. Soc. 57(2014) で発表された。そしてこの結果に関連した 2 編の論文が他の研究者との共著論文として出版された。

第三の目的は「Choi conjecture の考察」に変更した。研究の中で分かったことを順次研究集会などで講演し、最終的に超関数論を用いて肯定的に証明することに成功した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

- (1) H. Pedersen, M. Uchiyama, Inverses of operator convex functions. Ordered Structures and Applications: Positivity VII, Trend in Mathematics, (2016)363-370 .査読有  
DOI: 10.1007/978-3-319-27842-1\_23
- (2) M. Nagisa, M. Uchiyama, Order of operators determined by operator mean. Tohoku Math. Journal 67 (2015) no. 1, 39--50. 査読有  
<http://projecteuclid.org/tmj>
- (3) M. Uchiyama, A. Uchiyama, M. Giga, Superadditivity and derivative of operator functions. Linear Algebra Appl. 465(2015) 401-411. 査読有  
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.09.006>
- (4) M. Uchiyama, Operator inequalities: from a general theorem to concrete inequalities. Linear Algebra Appl. 465 (2015) 161-175. 査読有  
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.09.021>
- (5) M. Uchiyama, A converse of Loewner-Heinz inequality, geometric mean and spectral order. Proceeding of the Edinburgh Math. Soc. 57(2014) no. 2, 565--571. 査読有  
<https://doi.org/10.1017/S0013091513000655>
- (6) M. Uchiyama, T. Yamazaki, A converse of Loewner-Heinz inequality and

applications to operator means. J. Math. Anal. Appl. 413 (2014)no.1, 422--429. 査読有  
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.11.055>

- (7) S. S. Dragomir, M. Uchiyama, Some inequalities for power series of two operators in Hilbert spaces. Tokyo J. Math. 36 (2013) 483--498. 査読有  
<http://projecteuclid.org/tjm>
  - (8) M. S. Moslehian, H. Najafi, M. Uchiyama, A normal family of operator monotone functions. Hokkaido Math. J. 42 (2013) no. 3, 417--423. 査読有  
<http://projecteuclid.org/hokmj>
  - (9) M. Uchiyama, M. Seto, Inequality between unitary orbits. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 351 (2013) no. 7-8, 285--288. 査読有  
<https://doi.org/10.1016/j.crma.2013.04.024>
  - (10) M. Uchiyama, Operator monotone functions, Jacobi operators and orthogonal polynomials. J. Math. Anal. Appl. 401 (2013) no. 2, 501--509. 査読有  
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.12.016>
- [学会発表](計 11 件)
- (1) M. Uchiyama, Positive linear maps and rigid functions -Choi's conjecture-, Holomorphic Day, 2016年11月18日, University of Copenhagen (Denmark)
  - (2) M. Uchiyama, Positive linear maps on  $C^*$ -algebras and rigid functions, 作用素環-作用素論研究集会, 2016年10月11日, 前橋県立大学(群馬県前橋市)
  - (3) M. Uchiyama, Positive linear maps and rigid functions, ILAS, 2016年7月11日, UK Leuven (Belgium)
  - (4) M. Giga, M. Uchiyama, A. Uchiyama, 作用素関数の優加法性とフレッシュ微分, 日本数学会, 2015年3月22日, 明治大学(東京都千代田区)
  - (5) M. Uchiyama, 行列関数の解析-作用素不等式、多項式系、ガンマ関数-, 日本数学会(企画特別講演)2014年3月18日, 学習院大学(東京都豊島区)

- (6) M. Uchiyama, 直交多項式とガンマ関数の主逆関数, 函数論シンポジウム, 2014年1月12日 早稲田大学(東京都新宿区)
- (7) M. Uchiyama, majorization, operator inequality and operator mean, 数理研究集会「作用素単調関数と関連する話題について」, 2013年11月7日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)
- (8) M. Uchiyama, ガンマ関数の主逆関数, 実解析学シンポジウム, 2013年11月4日 岡山大学(岡山県岡山市)
- (9) M. Uchiyama, A converse of Loewner-Heinz inequality, 日本数学会, 2013年9月27日, 愛媛大学(愛媛県松山市)
- (10) M. Nagisa, M. Uchiyama, 作用素平均とその逆順序, 日本数学会, 2013年9月27日, 愛媛大学(愛媛県松山市)
- (11) T. Yamazaki, M. Uchiyama, Operator inequality and operator mean, 日本数学会, 2013年9月27日, 愛媛大学(愛媛県松山市)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

内山 充 (UCHIYAMA MITSURU)  
立命館大学・理工学部・教授  
研究者番号: 60112273

### (2) 連携研究者

幸崎 秀樹 (KOSAKI HIDEKI)  
九州大学・数理科学研究院・教授  
研究者番号: 20186612

綿谷 安男 (WATATANI YASUO)  
九州大学・数理科学研究院・教授  
研究者番号: 00175077

瀬戸 道生 (SETO MICHIO)  
島根大学・総合理工学研究院・准教授  
研究者番号: 30398953