3版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 6 月 25 日現在

機関番号：18001

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2013～2017

課題番号：25400118

研究課題名（和文）ワイル群不変な多変数楕円超幾何関数の差分方程式系の研究

研究課題名（英文）Research on the difference systems associated with multivariable elliptic hypergeometric functions with Weyl group symmetry

研究代表者

伊藤　雅彦（ITO, Masahiko）

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：30348461

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：ルート系に付随する多変数楕円超幾何関数を、ワイル群対称性と差分方程式を通して研究をした。代表者・伊藤雅彦（琉球大）と連携研究者・野海正俊（神戸大）は、BCn型の多変数楕円超幾何関数に対して、その差分方程式を構成する際に基本となる「補間関数」という対称関数の族を定義した。このことが、本研究を通して得られた最大の成果である。この「補間関数」を応用することで、BCn型多変数楕円超幾何関数の和公式や変換公式が証明された。

研究成果の概要（英文）：The multivariable elliptic hypergeometric functions associated with root systems were studied via their systems of difference equations and Weyl group symmetry.  Masahiko Ito (the leader of this research, Univ. of the Ryukyus) and Masatoshi Noumi (cooperating researcher of this research, Kobe univ.) provided a definition of the family of ``interpolation functions'' for the multivariable elliptic hypergeometric functions of type BCn.  This is the main result of this research. As applications of the interpolation functions, several summation and translation formulae for the multivariable elliptic hypergeometric functions of type BCn were proved.

研究分野：特殊関数論

キーワード：楕円超幾何関数　楕円セルバーグ積分　楕円ガンマ関数　楕円補間関数　ワイル群対称性　差分方程式系　マクドナルド定数項恒等式

## １．研究開始当初の背景

オイラーの五角数定理等に端を発し、ラマヌジャンの $_1\psi_1$ 和公式（q-二項定理の拡張）から始まる古典的に知られる一連の q-超幾何級数の変換公式が、数冊の本になるほど知られているが、それらはとても複雑なものに見えて、また多岐にわたっているため、何か著しいことが起こっていることがわかっても、当時の人々の目的意識を理解しがたいところがある。

しかし、1930 年代の Bailey や Watson による古典的な very-well-poised q-超幾何級数の変換公式が、1980 年代になって発見された Askey-Wilson 直交多項式の性質によって一つの解釈が与えられたように、古典的な結果が秘める重要性は計り知れない。その後、ワイル群の対称性をキーワードに Askey-Wilson 直交多項式はマクドナルド多変数直交多項式に拡張され、その直交内積を与える積分値を求めること等は 1980～90 年代にかけて、この多項式の研究において一つの中心的な話題であった。

このように、ワイル群対称性と q-差分方程式を手がかりにして、新たなる視点を与えられるような一連の古典的な公式が知られているが、その後 21 世紀に入ってから、これら直交系や超幾何級数の楕円関数類似が徐々に発見され始め、この 10 年ほどの間に q だけでなく多重のモジュライを含む、ワイル群の対称性をもつ多変数の超幾何積分および超幾何級数の変換公式が発見されている（q および p の二つのモジュライをもつ系を「楕円」と呼ぶ）。本研究の研究対象は、「楕円」の超幾何積分および級数である。

## ２．研究の目的

ワイル群不変な多変数楕円超幾何関数が満たすホロノミック差分方程式系の構造を、組合せ論、表現論、超幾何関数論の立場から研究し、古典群の指標、ポアンカレ級数、マクドナルド多項式等への応用も目指す。ワイル群のルート系が古典型（特に $BC_n$ 型）である場合は、楕円超幾何関数の既存の結果に対して「補間関数」を用いた新しい解釈を与えることを目的とする。また、ワイル群のルート系が例外型(特に $G_2$, $F_4$ 型)である場合は、発見的な方法によって楕円超幾何関数が満たす差分方程式を明らかにし、その解の接続公式として楕円超幾何関数の変換公式を探求する。

## ３．研究の方法

(1)$BC_n$ 型楕円超幾何関数が満たすホロノミック差分方程式系を１階連立差分方程式系で表したときの係数行列を求める。
(2)上記差分方程式系の基本解から作られるロンスキー行列式を楕円ガンマ関数の積で表示する。
(3)上記差分方程式系の一般解を基本解の一次結合で表示する公式（接続公式）の係数を具体的に決定する。
(4)上記ロンスキー行列式および接続公式の $p \to 0$ または $q \to 0,1$ の極限をとり、その結果がシンプレクティック群の既約指標とどのように関係しているか調べる。
(5)$BC_n$ 型の類似から、$G_2$, $F_4$ 型楕円超幾何関数が満たす和公式および変換公式を発見する。
(6)応用として、楕円への拡張に伴い、多変数直交多項式系（マクドナルド多項式）や多体可積分系の固有値問題が、どのように拡張されるのかを考察する。

## ４．研究成果

$BC_n$型楕円超幾何関数は、そのパラメータの個数に応じて異なるホロノミック差分方程式系を満たしている。その差分方程式系を一階連立差分方程式系で表示するとき、その係数行列は解空間の基底の取り方に依存しており、基底の取り方に応じて成分も変化する。研究代表者・伊藤の以前の研究によって、q-類似の場合（楕円類似の特殊な場合）における望ましい基底の取り方は、「補間関数」という対称関数の族に関係することがわかっていたため、この考え方が楕円類似の場合に共通するものかどうかを、連携研究者・野海正俊（神戸大）とともに検証した。その結果、野海が提唱する$BC_n$型の核関数の観点から「補間関数」が捉えられることがわかった。野海による核関数を使った「補間関数」を定義する方法は

構成的あり、楕円超幾何関数の場合においても大変有効であることを確かめた。この研究によって、伊藤と野海は「$BC_n$型楕円Lagrange補間関数」を定義し、$BC_n$型楕円超幾何関数に応用した。具体的には、(1) $BC_n$型楕円セルバーグ積分の楕円ガンマ関数表示、(2) $BC_n$型楕円超幾何級数の和公式、に関する「$BC_n$型楕円Lagrange補間関数」を用いた証明法を与えた[発表論文②、③参照]。この証明では、積分を差分方程式の解とみなすことが重要で、その差分方程式の導出に「$BC_n$型楕円Lagrange補間関数」が使われている。さらに（3）$BC_n$型q-セルバーグ積分の独立なサイクルの間の接続係数として「$BC_n$型楕円Lagrange補間関数」が現れることを示し、その具体的な表示を得た[発表論文④参照]。

また、q–類似における「補間関数」は$C_n$型既約指標の一次結合からなる多項式に対応することがわかっているが、この状況は楕円超幾何関数の場合においても類似している。つまりモジュライpやqを特殊化した場合、$C_n$型既約指標の関係式が得られる。この具体的表示をシルベスター行列の行列式の関係式としてとらえ、その成果を代表者・伊藤と連携研究者・岡田聡一（名古屋大）および石川雅雄（琉球大）の共著として出版した[発表論文⑧参照]。

代表者・伊藤は、メルボルン大学 Peter J. Forrester の協力を得て、Dixon-Anderson型q-級数とセルバーグ型q-級数（どちらも$A_n$型楕円超幾何関数のパラメータ$p\to 0$の極限として得られると想定される級数）の和公式に関する成果を3本の共著論文にまとめた[発表論文①、⑥、⑦参照]。

代表者・伊藤は、メルボルン大学 Nicholas S. Witte の協力を得て、Askey-Wilson型積分（1変数$BC_n$型楕円超幾何関数のパラメータ$p\to 0$の極限）が満たす差分方程式系を応用して、数理物理における1次元量子$sl_2$普遍XXZモデルの量子逆散乱法および直交多項式系との関連を議論し、共著論文にまとめた[発表論文⑤参照]。

以上が学術雑誌で公表した成果であるが、それ以外にも学会発表を行った主な成果は、以下の3つ。

(1) $BC_n$型楕円超幾何積分に付随する差分ドラームコホモロジーの基底として、「$BC_n$型楕円Lagrange補間関数」を取ることができる。その場合、$BC_n$型楕円超幾何積分が満たす差分方程式系の解の独立性を判定するための行列式が定義でき、代表者・伊藤と連携研究者・野海は、その行列式を楕円ガンマ関数の積によって具体的に表示する公式を証明した[学会発表②、③]。

(2) 代表者・伊藤と連携研究者・野海は、$A_n$型q-セルバーグ積分の独立なサイクルの間の接続係数としても、$A_n$型特有の「補間関数」が現れることを示し、その具体的な表示を得た。$A_n$型q-セルバーグ積分の「接続公式」は特別な場合として、1950年代のSlaterのq-超幾何級数の変換公式を含むことがわかった[学会発表⑤、⑥]。

(3) $BC_n$型楕円超幾何関数との関連で、代表者・伊藤、連携研究者・野海、神戸大学大学院博士前期課程・宮永愛子は、$G_2$型ワイル群の対称性をもつq-超幾何積分に関する和公式・変換公式に関して共同研究を行った。その結果、$G_2$型のq-超幾何積分が満たすq-差分方程式のロンスキー行列式が無限積で表示できる(q-ガンマ関数を使った積表示できる)ことを、コンピュータを使って確認した。この結果は$G_2$型マクドナルド定数項恒等式を特別な場合として含んでいることから、マクドナルド直交多項式系への応用も期待できる[学会発表①]。

## ５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　8　件）


① Masahiko Ito, Peter J. Forrester, A bilateral extension of the q-Selberg integral, Transactions of the American Mathematical Society 369 (2017), no. 4 pp.2843-2878. 査読有 DOI:10.1090/tran/6851

② Masahiko Ito, Masatoshi Noumi, Derivation of a $BC_n$ elliptic summation formula via the fundamental invariants. Constr. Approx. 45 (2017), no. 1, pp.33-46. 査読有 DOI:10.1007/s00365-016-9340-8

③ Masahiko Ito, Masatoshi Noumi, Evaluation of the $BC_n$ elliptic Selberg

integral via the fundamental invariants. Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), no. 2, 689-703. 査読有
DOI:10.1090/proc/13234

④ Masahiko Ito, Masatoshi Noumi,
A generalization of the Sears-Slater transformation and elliptic Lagrange interpolation of type $BC_n$. Adv. Math. 299 (2016), 361-380. 査読有
DOI:10.1016/j.aim.2016.05.016

⑤ Masahiko Ito, N. S. Witte,
On a family of integrals that extend the Askey-Wilson integral. J. Math. Anal. Appl. 421 (2015), no. 2, 1101-1130. 査読有
DOI:10.1016/j.jmaa.2014.07.056

⑥ Masahiko Ito, Peter J. Forrester,
The q-Dixon-Anderson integral and multi-dimensional $_1\psi_1$ summations. J. Math. Anal. Appl. 423 (2015), no. 2, 1704-1737. 査読有
DOI:10.1016/j.jmaa.2014.10.034

⑦ Masahiko Ito, Peter J. Forrester,
Ramanujan's $_1\psi_1$ summation theorem ---perspective, announcement of bilateral q-Dixon-Anderson and q-Selberg integral extensions, and context---. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 90 (2014), no. 7, 92-97. 査読有
DOI:10.3792/pjaa.90.92

⑧ Masao Ishikawa, Masahiko Ito, Soichi Okada,
A compound determinant identity for rectangular matrices and determinants of Schur functions. Adv. in Appl. Math. 51 (2013), no. 5, 635-654. 査読有
DOI:10.1016/j.aam.2013.08.001

〔学会発表〕（計 10 件）

① 伊藤　雅彦、宮永　愛子、野海　正俊、
$G_2$型Weyl群不変なq超幾何積分の行列式公式、日本数学会年会「無限可積分系セッション」東京大学(東京都目黒区)
2018-3-20

② 伊藤　雅彦、野海　正俊、
Selberg 型 $BC_n$ 楕円超幾何積分の行列式公式、日本数学会秋季総合分科会「無限可積分系セッション」山形大学(山形県山形市) 2017-9-11

③ Masahiko Ito,
A determinant formula associated with the elliptic hypergeometric integrals of type $BC_n$, Elliptic Hypergeometric Functions in Combinatorics, Integrable Systems and Physics, ウィーン大学エルヴィン・シュレーディンガー研究所（オーストリア、ウィーン）
2017-03-23

④ 伊藤　雅彦、野海　正俊、
Gustafson-Rakha 和公式の楕円化、日本数学会秋季総合分科会「無限可積分系セッション」関西大学（大阪府吹田市）
2016-09-15

⑤ 伊藤　雅彦、野海　正俊、
A 型 Jackson 積分と Ramanujan $_1\psi_1$ 和公式，Slater $_r\psi_r$ 変換公式の一般化、日本数学会 2016 年度年会「無限可積分系セッション」筑波大学(茨城県つくば市)
2016-03-18

⑥ 伊藤　雅彦、野海　正俊、
A 型楕円 Lagrange 補間函数の構成法、日本数学会 2016 年度年会「無限可積分系セッション」筑波大学(茨城県つくば市)
2016-03-18

⑦ 伊藤　雅彦、野海　正俊、
Sears-Slater の変換公式の一般化と $BC_n$ 型楕円 Lagrange 補間函数、日本数学会 2015 年度秋季総合分科会「無限可積分系セッション」京都産業大(京都府京都市) 2015-09-14

⑧ 伊藤　雅彦、野海　正俊、
BC型楕円多重和公式の基本不変式による導出、日本数学会 2015 年度年会「無限可積分系セッション」明治大学 駿河台キャンパス(東京都千代田区) 2015-03-23

⑨ 伊藤　雅彦、
q-Dixon-Anderson 積分、日本数学会秋期分科会「無限可積分系セッション」愛媛大学（愛媛県松山市）2013-09-25

⑩ 伊藤　雅彦、
両側級数に拡張された q-Selberg 積分、日本数学会秋期分科会「無限可積分系セッション」愛媛大学（愛媛県松山市）
2013-09-25

## ６．研究組織

(1)研究代表者

伊藤　雅彦（ITO, Masahiko）
琉球大学・理学部・教授
研究者番号：30348461

(2)連携研究者

野海　正俊（NOUMI, Masatoshi）
神戸大学・理学研究科・教授
研究者番号：80164672

(3)連携研究者

岡田　聡一（OKADA, Soichi）
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
研究者番号：20224016

(4)連携研究者

金子　譲一（KANEKO, Jouichi）
琉球大学・理学部・教授
研究者番号：10194911

(5)研究協力者

Peter J. FORRESTER
メルボルン大・理学部・教授