

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400119

研究課題名(和文) 準線形退化型ケラー・シーゲル系と複素ギンツブルク・ランダウ型方程式の研究

研究課題名(英文) Study of quasilinear degenerate Keller-Segel systems and complex Ginzburg-Landau type equations'

研究代表者

横田 智巳 (Yokota, Tomomi)

東京理科大学・理学部・准教授

研究者番号：60349826

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、「準線形退化型ケラー・シーゲル系の時間大域的可解性及び解の漸近挙動」と「複素ギンツブルク・ランダウ型方程式の時間大域的可解性及び解の漸近挙動」の2つを主なテーマとして数学解析を行った。これら2つのテーマで扱う方程式は形式的には異なるが放物型方程式という点で共通点がある。前者については、課題として残されていた解の有界性を示すことに成功しただけでなく、関連する方程式についても同様の成果が得られた。後者については、解の爆発や消滅に関する精密な結果を得ることに成功した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we made mathematical analysis to "Global-in-time solvability and asymptotic behavior of solutions in quasilinear degenerate Keller-Segel systems" and "Global-in-time solvability and asymptotic behavior of solutions in complex Ginzburg-Landau type equations" as main themes. The equations dealt with in these two themes are formally different, but there is a common in terms of parabolic equations. As to the former theme, we not only succeeded in showing boundedness of solutions left as an open problem but also obtained the same results for related equations. As to the latter theme, we succeeded in obtaining a precise result on blow-up and extinction of solutions.

研究分野：関数解析・発展方程式

キーワード：解の存在 解の漸近挙動 ケラー・シーゲル系 複素ギンツブルク・ランダウ方程式

### 1. 研究開始当初の背景

ケラー・シーゲル系は細胞性粘菌の生物モデルであり、国内外において特に 2000 年以降盛んに研究されているモデルである。一方、複素ギンツブルク・ランダウ方程式は、数学と物理学の双方にまたがり研究されているモデルである。最近の研究動向として、前者については準線形に一般化したモデルの研究が進んでいるが、退化型の場合は数学的な困難さのため課題が多く残されている。第 2 方程式が楕円型方程式である場合には、詳細な研究がいくつかあるものの、そうでない放物・放物型の場合については、解析が困難であることも課題が多く残されている理由である。後者の複素ギンツブルク・ランダウ方程式についても、係数関数が非有界な場合の研究は始まったばかりであり、非線形シュレディンガー型方程式との関連を含めて課題が残されている。複素ギンツブルク・ランダウ方程式の解析が困難な理由は、拡散項にかかる複素係数とべき乗型の非線形項にかかる複素係数のそれぞれの偏角が一般に等しくないことである。それぞれの偏角が等しい特別な場合について、幾つかの研究が始まったところである。

### 2. 研究の目的

上記の背景をもとに、本研究では、以下の 2 つのテーマを扱う。

(1) 準線形退化型ケラー・シーゲル系の時間大域的可解性及び解の漸近挙動。特に未解決問題として残されていて解の時間に関する一様な有界性を示すことを目的とする。特に拡散現象が集中現象よりも強いことを示す劣臨界の場合から研究に着手し、解の時間に関する一様な有界性を明確にする。また、2 種の走化性モデルや癌浸潤走化性モデル等にも研究対象を広げて、同様の結果を導くことも目的とする。また、それらの近似問題を極大単調作用素論などの抽象理論の応用例の対象として考察することも目的とする。

(2) 複素ギンツブルク・ランダウ型方程式の時間大域的可解性及び解の漸近挙動。特に、複素係数の偏角が特別な条件を満たす場合の解の有限時刻での爆発の様子や非斉次項をもつ場合の解の有限時刻での消滅の様子を詳しく解析することを目的とする。従来の極大単調作用素論に基づく手法はもはや役に立たないので、非線形の熱方程式や非線形のシュレディンガー方程式に対して知られている手法をどこまで適用できるかを明らかにすることも目的とする。

### 3. 研究の方法

上記の目的で述べた(1), (2)に対して、それぞれ以下の方法により研究を行う。いずれの研究についても、研究の進捗や成果報告を国内外の研究集会で定期的に発表し意見交換等を行うことが効果的に研究を進めるために

重要であると考えている。

(1) 準線形退化型ケラー・シーゲル系に対しては、まず第 1 方程式の拡散項と走化性項が典型的なべき乗型の場合に未解決問題となっていた解の時間に関する一様な有界性を、最大正則性原理に基づいた新しい方法で示す。特に、ケラー・シーゲル系の第 2 方程式が生み出す指数減衰の効果を取り入れることを考える。次にべき乗型に限定していた部分を一般の関数におきかえた問題を扱い、どこまで一般化可能であるかを調べる。また、2 種の走化性モデルや癌浸潤走化性モデル等への拡張を考える。いずれのモデルについても、近似解を構成する必要があるため、そのために極大単調作用素論が有用であることを示す。

(2) まず拡散項と非線形項にかかる複素係数の偏角が等しい場合の複素ギンツブルク・ランダウ型方程式の解の有限時刻での爆発が起こる場合にその様子を詳しく調べる。具体的には、先行研究とは異なるノルムでの爆発を示すことで付加的な情報を得ることから始める。通常形の複素ギンツブルク・ランダウ方程式の解の消滅についても、同様に利用するノルムの種類を変えることで消滅の様子を詳しく解析する。これにより先行研究の改良を与える。

### 4. 研究成果

上記の目的で述べた(1), (2)に対して、それぞれ以下の研究成果を得た。得られた成果は、後で記すように論文または研究集会で発表した。

(1) 準線形退化型ケラー・シーゲル系に対しては、まず第 1 方程式の拡散項と走化性項が典型的なべき乗型の場合に未解決問題となっていた解の時間に関する一様な有界性を、最大正則性原理を用いた新しい方法により簡潔に示すことができた。その証明において、ケラー・シーゲル系の第 2 方程式が生み出す指数減衰の効果を取り入れたことが成功の鍵となった。次にその一般化にも成功し、2 種の走化性モデルや癌浸潤走化性モデルに対しても解の時間に関する一様な有界性や解の漸近挙動に関する新しい結果を得ることができた。さらに、各問題の近似解を構成の過程において、非線形の極大単調作用素論が有用であることを示せた。

(2) 複素ギンツブルク・ランダウ型方程式の解の有限時刻での爆発が起こる場合に、先行研究とは異なるノルムでの爆発を示すことで付加的な情報を得ることができた。解の有限時刻での消滅についても、同様に利用するノルムの種類を変えることで消滅の様子を異なる観点から調べることができた。特に解の消滅については、消滅のレートについて詳しい情報が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計12件)

Daisuke Shimotsuma, Tomomi Yokota, Kentarou Yoshii, Existence and decay estimates of solutions to complex Ginzburg–Landau type equations, *Journal of Differential Equations*, 260, 2016, 3119–3149, 査読有.  
DOI: 10.1016/j.jde.2015.10.030

Kentarou Fujie, Akio Ito, Michael Winkler, Tomomi Yokota, Stabilization in a chemotaxis model for tumor invasion, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A*, 36, 2016, 151–169, 査読有.  
DOI: 10.3934/dcds.2016.36.151

Kentarou Fujie, Michael Winkler, Tomomi Yokota, Boundedness of solutions to parabolic-elliptic Keller-Segel systems with signal-dependent sensitivity, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38, 2015, 1212–1224, 査読有.  
DOI: 10.1002/mma.3149

Tomomi Yokota, Noriaki Yoshino, Existence of solutions to chemotaxis dynamics with Lipschitz diffusion and superlinear growth, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 419, 2014, 756–774, 査読有.  
DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.04.069

Kentarou Fujie, Michael Winkler, Tomomi Yokota, Blow-up prevention by logistic sources in a parabolic–elliptic Keller–Segel system with singular sensitivity, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 109, 2014, 56–71, 査読有.  
DOI: 10.1016/j.na.2014.06.017

Kentarou Fujie, Tomomi Yokota, Boundedness of solutions to parabolic-elliptic chemotaxis-growth systems with signal-dependent sensitivity, *Mathematica Bohemica*, 139, 2014, 639–647, 査読有.  
<http://mb.math.cas.cz/mb139-4/8.html>

Daisuke Shimotsuma, Tomomi Yokota, Kentarou Yoshii, Cauchy problem for

the complex Ginzburg–Landau type equation with  $L^p$ -initial data, *Mathematica Bohemica*, 139, 2014, 353–361, 査読有.  
<http://mb.math.cas.cz/mb139-2/19.html>

Yoji Yamashita, Tomomi Yokota, Existence of solutions to some degenerate parabolic equation associated with the  $p$ -Laplacian in the critical case, *Nonlinear Analysis*, 93, 2013, 168–180, 査読有.  
DOI: 10.1016/j.na.2013.07.035

Motohiro Sobajima, Tomomi Yokota, A direct approach to generation of analytic semigroups by generalized Ornstein-Uhlenbeck operators in weighted  $L^p$  spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 403, 2013, 606–618, 査読有..  
DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.02.054

Sachiko Ishida, Yusuke Maeda, Tomomi Yokota, Gradient estimate for solutions to quasilinear non-degenerate Keller-Segel systems on  $\mathbb{R}^N$ , *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, 18, 2013, 2537–2568, 査読有..  
DOI: 10.3934/dcdsb.2013.18.2537

Sachiko Ishida, Tomomi Yokota, Blow-up in finite or infinite time for quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, 18, 2013, 2569–2596, 査読有.  
DOI: 10.3934/dcdsb.2013.18.2569

Sachiko Ishida, Takashi Ono, Tomomi Yokota, Possibility of the existence of blow-up solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36, 2013, 745–760, 査読有..  
DOI: 10.1002/mma.2622

[学会発表](計6件)

Tomomi Yokota, Boundedness of solutions to a quasilinear degenerate Keller-Segel system with subcritical sensitivity, The 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2015), 2015年8月12日, Beijing (China)

Tomomi Yokota, Global existence and boundedness in a quasilinear degenerate Keller-Segel system, Equadiff 2015, 2015年7月7日, Lyon (France)

Tomomi Yokota, Blow-up for a complex Ginzburg-Landau equation focusing on the parabolicity (Professor P. L. Bhatnagar Memorial Lecture), 59th Congress of the Indian Society Of Theoretical and Applied Mechanics, 2014年12月19日, Bengaluru (India)

Tomomi Yokota, Noriaki Yoshino, Nonlinear  $m$ -accretive operator approach to parabolic-elliptic chemotaxis systems with superlinear growth, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014年7月10日, Madrid (Spain)

Tomomi Yokota, Takuya Tomidokoro, Blow-up in  $H^1$ -norm for a special type of complex Ginzburg-Landau equations, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014年7月8日, Madrid (Spain)

Tomomi Yokota, Kentarou Fujie, Michael Winkler, Boundedness of solutions to parabolic-elliptic Keller-Segel systems, Equadiff 13, 2013年8月27日, Prague (Czech Republic)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：

取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等 なし

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

横田 智巳 (YOKOTA Tomomi)  
東京理科大学・理学部・准教授  
研究者番号： 60349826

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

##### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：