

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 9 月 5 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400123

研究課題名(和文)作用素不等式による凝縮系物理学の研究

研究課題名(英文)Studies of condensed matter physics in terms of operator inequalities

研究代表者

宮尾 忠宏 (Miyao, Tadahiro)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20554421

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 自己双対錐を不変にする作用素のなす不等式を応用することにより、フレリッヒ模型の紫外切断除去の新しい方法を開発した。これにより、紫外切断を除去した模型の基底状態が一意的であることの初めての証明を与えた。この結果は、国際的な雑誌に論文として掲載されている。

(2) 多電子と量子電磁場が相互作用する系の電荷感受率の上界を評価した。これにより、考察下の系において電荷長距離秩序が存在しないことを厳密に証明した。この結果は国際的な雑誌に論文として掲載されている。

研究成果の概要(英文)：(1) I studied some operator inequalities associated with self-dual cones. By applying these operator inequalities, I constructed a novel method of analyzing removal of the ultraviolet cutoff for the Froehlich model. By the method, I solved a longstanding problem, that is, I proved uniqueness of ground states for the Froehlich model. These results are published in international journals.

(2) I investigated a many-electron system coupled to the quantized radiation field. I obtained a useful upper bound of the charge susceptibility of the system. As a result, I proved the absence of long-range charge order. This result is published in an international journal.

研究分野：数理物理学

キーワード：フレリッヒ模型 作用素不等式 ハバード模型 長距離電荷秩序 スピン鏡映正值性 量子電磁場  
電子格子相互作用 汎関数積分

## 1. 研究開始当初の背景

線形代数学でよく知られている Perron-Frobenius (PF) の定理が量子物理学において有用であることは 1930 年代から認識されていた。この定理は、「対称行列の最大固有値は非縮退であり、対応する固有ベクトルの成分はすべて正になる」という主張である。PF の定理の拡張はこれまでに、様々な著者により論じられてきている。例えば、 $L^2$  空間への拡張 [ReSi]、そして Gloss による非可換  $L^2$  空間への拡張である [Gloss]。一方で、Faris による抽象論 [Faris] といった、ヒルベルト空間の具体的な構造には踏み込まない抽象論もいくつか散見される。いずれにしても、物理的な応用に際して扱はずらい形のものであり、PF の定理の量子物理学における有用性を調べつくしたとは言い難い状況であった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、次の通りである。

Faris 理論を数学的に整備し、これまでに PF の定理が適用不可能とされていた物理系に適用する。一見、PF 理論とは全く関係がないと思われていた物理的諸概念に PF 理論からアプローチし、新しい視点を提供する。

による新しいアプローチにより、これまで未解決であった強相関電子系の未解決問題を解決する。

## 3. 研究の方法

これまでの PF 定理の記述は、見通しが悪いものであった。そこで宮尾は、自己双対錐を不変にする作用素のなす不等式による記述を考案した。自己双対錐に付随する不等式は、古くから研究が行われてきた。この不等式を PF 理論に応用し、強相関電子系に本格的に応用したのは宮尾の数理物理学への独自の貢献である。この新しい記述方式により、これまでに記述することが難しかった計算等が容易になり、解析の難しい物理系への本格的な応用が可能になった。

通常の PF 理論では、考えるベクトル空間の基底を変えると、一般には定理が使えなくなる。これを理論の欠点と見做す研究者もいたが、実はこの事実を積極的に応用することにより、物理的に興味深い現象が記述できる。このことは数学的には、基準とする自己双対錐を問題に応じて選ぶことに相当する。このため、具体的な自己双対錐を構成することは数学的にも物理的にも重要な問題である。本

研究では、主に 4 つの自己双対錐を用いた。これらは、古くから無意識に用いられているものもあれば、宮尾が拡張したものも含まれる。これらの自己双対錐を問題に応じて使い分けることにより、様々な応用に対応できるように理論を整備した。

## 4. 研究成果

本研究による成果は以下の通りである。

### (ア) フレーリッヒ模型の紫外切断除去問題の解決

フレーリッヒ模型は、1 つの電子とフォノンが相互作用する系を記述する、基本的な模型である。この模型は、非相対論的場の量子論の文脈においては、弱い紫外発散を含む模型である。より詳しく述べると、ハミルトニアンを定義する際に、まず、紫外切断をハミルトニアンに入れておき、しかる後に、この紫外切断を除く。このような操作は、作用素論的には、Nelson により、1960 年には数学的な基礎づけが与えられていた [Nelson]。しかしながら、紫外切断を除去したハミルトニアンの基底状態が一意的かどうかは長い間の未解決問題であった。宮尾は、この問題を作用素不等式理論で開発した単調性の方法を用いて解決した。結果は、[Miyao2, Miyao3] に掲載されている。

更に一步進んで、紫外切断除去法のまったく新しい手法を提出した。紫外切断除去の方法は、これまでに Nelson による方法しか知られておらず、宮尾の提案する作用素不等式の有用性を証明するものである。この結果は、[Miyao3] に掲載されている。

### (イ) 多電子と量子電磁場が相互作用する系における、電荷感受率の上界の導出。

沢山の電子が相関し合うことにより物質の性質は特徴づけられる。本研究では、系の電荷秩序について研究をした。沢山の電子が、格子上を動き回る系を考える。電子間にはクーロン斥力が働いていて、互いに離れようとする。一方、電子は格子間を動き回る。他にもいくつかの量子論的な効果が複雑に絡み合うことにより、多体電子系には様々な相 (規則正しい電子の配列) が現れたり、現

れなかつたりすると考えられている。Kubo-Kishi は、このような系において、電荷秩序が存在しないことを厳密に証明した[KuboKishi]。

本研究では、沢山の電子が、さらに量子電磁場と相互作用する場合を研究した。得られた結果として、Kubo-Kishi の定理[KuboKishi]は、量子電磁場がある場合でも依然として成立するという事実である。このような結果はこれまでに数値計算等で、予想されていたのみであり、厳密証明を与えたのは宮尾が最初である。この結果は論文として、国際的な雑誌に掲載してある[Miyao]。

この証明の際に、Lieb による spin reflection positivity[Lieb] のアイデアを拡張して応用した。Spin reflection positivity は Lieb により、Hubbard 模型の解析に際して導入された方法である。その起源は、構成的場の量子論にあることを指摘しておく。この方法は、極めて強力であるが、一方で応用するための制限が多かった。宮尾はこの制限を緩和することにより、量子電磁場との相互作用を扱える手法を開発した。さらに、この解析において、有限温度における量子電磁場の確率論的記述も整備した。この記述は今後も応用が見込まれる。

#### [引用文献]

[Faris] W. G. Faris, Invariant cones and uniqueness of the ground state for fermion systems. J. Math. Phys. 13 (1972), 1285-1290.

[Gloss] L. Gross, Existence and uniqueness of physical ground states. J. Funct. Anal. 10 (1972), 52-109.

[KuboKishi] K. Kubo, T. Kishi, Rigorous bounds on the susceptibilities of the Hubbard model. Phys. Rev. B 41 (1990), 4866-4868.

[Lieb] E. H. Lieb, Two theorems on the Hubbard model. Phys. Rev. Lett. 62 (1989), 1201-1204.

[Nelson] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, J. Math. Phys., 5

(1964), 1190-1197.

[ReSi] M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics Vol. IV, Academic Press, New York, 1978.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3件)

[Miyao1] T. Miyao, Upper bounds on the charge susceptibility of many-electron systems coupled to the quantized radiation field. Lett. Math. Phys. 査読有 105 (2015), 1119-1133.

[Miyao2] T. Miyao, Monotonicity of the polaron energy. Rep. Math. Phys. 査読有 74 (2014), 379-398.

[Miyao3] T. Miyao, Monotonicity of the polaron energy II: General theory of operator monotonicity. Jour. Stat. Phys. 査読有 153 (2013), 70-92.

[学会発表](計 7件)

1 招待講演 T. Miyao, Operator inequalities in condensed matter physics, 第17回北東数学解析研究会, 北海道大学理学部(北海道・札幌市), 2016年2月15日.

2 招待講演 T. Miyao, Froehlich 模型における相関不等式'', 「量子場の数理とその周辺」, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市), 2015年10月7日.

3 招待講演 T. Miyao, Tomonaga-Luttinger 模型入門, 第4回 信州関数解析シンポジウム, 信州大学数学科(長野県・松本市), 2015年12月3日

4 招待講演 T. Miyao, Correlation inequalities for the quantum rotor model'', 信州数理物理セミナー, 信州大学理学部数学科(長野県・松本市), 2014年11月21日.

5 招待講演 T. Miyao, 「電子-格子相互作用系における基底状態の性質について」, 「量子場の数理とその周辺」, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市), 2014年10月6日.

6 T. Miyao, ``多体電子系と作用素不等式'',  
札幌数理物理研究集会, 北海道大学理学部  
(北海道・札幌市), 2014年10月6日.

7 招待講演 T. Miyao, ``Monotonicity of  
the polaron energy'', 「繰り込み群の数理  
科学での応用」, 京都大学数理解析研究所(京  
都府・京都市), 2013年9月11日.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

宮尾忠宏 (MIYAO, Tadahiro)  
北海道大学・大学院理学研究院・准教授  
研究者番号: 20554421

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: