

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 3 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400126

研究課題名(和文) 熱方程式・波動方程式の解を保つ変換の研究

研究課題名(英文) Research on transformations preserving solutions of the heat equation, wave equation

研究代表者

下村 勝孝 (Shimomura, Katsunori)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号：00201559

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：熱方程式は温度分布の変化を表す方程式、波動方程式は波を表す方程式で、どちらも物理学に由来し数学においても極めて重要である。今回、半リーマン多様体上の熱方程式の解を保つ変換の研究を行った。半ユークリッド空間に一般ローレンツ群不変な不定値計量が入った半リーマン多様体上の熱方程式の解を保つ変換を詳しく調べ、次元が3以上で変換の歪曲度の逆数が0次と2次の場合には変換の集合、変換の具体的な形、を決定することが出来た。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied the caloric morphism on semi-riemannian manifolds, especially semi-euclidean spaces with general Lorentz invariant indefinite metric. We determined the set of mappings and transformations, and also their explicit forms in the case that the dimension of the manifold is greater or equal to 3 and the reciprocal of the dilatation of the transformation has degree 0 or 2.

研究分野：ポテンシャル論

キーワード：Appell変換 Bateman変換 caloric morphism 熱方程式の解を保つ変換 波動方程式の解を保つ変換

1. 研究開始当初の背景

従来、調和関数を保つ変換の研究は、Harmonic morphism という形で、特にリーマン多様体上で、偏微分方程式、微分幾何、ポテンシャル論の各側面から、活発に研究されている。一方で、熱方程式の解を保つ変換については、古典的な Appell 変換だけがよく知られ、熱方程式の解の研究、特に正值解の研究に大きな役割を果たしてきたが、Leutwiler が注意するまでは何も一般的考察は行われていなかった。リーマン多様体、半リーマン多様体の場合にも一般的な特徴付けも含め何も知られておらず、ユークリッド空間の場合も、次元が異なる場合には何も知られていなかった。

以上の研究動向の中で本研究、熱方程式の解を保つ変換の研究を始めた。熱方程式の解を保つ変換については、Leutwiler が次元の等しいユークリッド空間の場合を扱った研究があるのみであり、本研究は新しいテーマを開くものである。また本研究は、応用を意識して変換の具体的な形を求めることを目標とする点で、調和関数を保つ変換の場合の研究よりも一歩踏み込んだものである。

これまでにユークリッド空間上の熱方程式の解を保つ変換と、平行してリーマン多様体、半リーマン多様体上の熱方程式の解を保つ変換についても研究し、これまでに大きな進展があった。

次元が異なるユークリッド空間の間の変換について、写像が時間座標毎には多項式写像で、かつ時間座標の変換が実解析的である場合に、変換の形を具体的に、完全に決定し、それらは全て Appell 変換の直和であることを示した。

一方で、Appell 変換を、半ユークリッド空間の場合にも拡張して、次元が等しい場合に変換の形を、具体的に完全に決定した。結果は、双方の空間の計量の型が同じまたは反対でなければならず、変換は全て、相似変換と、Appell 変換と、反転との合成で書ける、というものである。

リーマン多様体、半リーマン多様体上の間の熱方程式の解を保つ変換については、最初に一般論として、ユークリッド空間の場合を拡張する形で変換の特徴付け定理を得た。

一般論に関連して、多様体上の変換について、リーマン多様体の場合と半リーマン多様体の場合の違いを明らかにするために具体例を考察し、半リーマン多様体上の熱方程式を保つ変換で、時間変数の向きが逆転する例と、時間変数の変換と空間的拡大率が空間変数に依存する例を発見した。この結果により、変換の性質の中で「時間変数変換と空間拡大率が空間変数に依存しない」と「時間変数の向き

は不変」とは、多様体のラプリアンが楕円型であることによることが分かった。また、多様体の張力場との関係を調べ、変換の特徴付けの方程式が、重み付き張力場による熱方程式と同じであることが分かった。

次いで、リーマン多様体の具体的な場合として、原点を除いたユークリッド空間の動径方向リーマン計量に関する熱方程式を保つ変換を調べ、一般の回転不変なリーマン計量の場合と関連付けて調べた。Appell 変換の直接の拡張の場合には、具体的に形を決定した。その中に、ユークリッド空間では存在しない興味深い例を得た。

半リーマン多様体の場合の具体的な重要例として、計量退化集合を除いた半ユークリッド空間の動径方向半リーマン計量に関する熱方程式の解を保つ変換を調べ、Appell 変換の直接の拡張の場合に、形を決定することができた。また、諸係数をうまく選べば、Appell 型変換の間には、計量の冪指数によって連続的にパラメータ付けが出来ることが判った。

それらの結果を元に、3次元以上の場合には、ユークリッド空間上の回転不変計量に関する、熱方程式の解を保つ変換を完全に決定出来た。

その後、ユークリッド空間上の回転不変計量に関する結果を、半リーマン多様体の具体的な重要例である、計量退化集合を除いた半ユークリッド空間に一般ローレンツ群で不変な不定値計量を入れた半リーマン多様体に対して拡張することを考えることにした。その準備として一般不定値計量の半ユークリッド空間を考え、Liouville の定理を拡張した。その結果、波動方程式を含む一般の超双曲型方程式の解を保つ変換を決定することが出来た。

2. 研究の目的

本研究の目的は、熱方程式と波動方程式の解を保つ(方程式の解を再び方程式の解に写す)変換に関する問題を、ポテンシャル論と実解析的手法を用いて、さらに広く深く、新しい進展を得ることである。研究分担者が各自で専門分野での研究を進めながら、「変換の形を具体的に決定する」をキーワードにして、有機的関連を持つ共同研究を行う。その中で本研究では、次元が異なるユークリッド空間の間の熱方程式の解を保つ変換、リーマン多様体・半リーマン多様体の間の熱方程式の解を保つ変換、の具体的な形を求めること、を目的とする。得られた具体的な変換を用いて、領域を別の領域に写像し、熱方程式のマルチン境界、熱方程式の解の境界挙動や拡張可能性に応用することも目的としている。

3. 研究の方法

本研究では、ユークリッド空間上の回転不変計量に関する熱方程式の解を保つ変換を決定した結果を、半ユークリッド空間上の一般ローレンツ群不変な不定値計量に対して拡張することを考えた。

基本的道具となる、半ユークリッド空間上の波動方程式や一般の超双曲型方程式の解を保つ変換について決定した結果、とりわけ超双曲型方程式の解を保つ変換全体がなす集合の構造、特に変換の間に成り立つ関係式、変換の族の有効なパラメータ付け、スケーリングや極限移行などの結果を用いて、3次元以上の一般ローレンツ群不変計量に関する熱方程式の解を保つ変換がどのような形に絞られるのかを調べた。

ユークリッド空間上の回転不変計量に関する熱方程式の解を保つ変換を決定した時の議論を一般化するという方法で研究を進めたが、不定値計量の場合には、正定値計量の場合の幾何学的直感から来る予断によって誤った結果に導かれることがあるため、正定値計量の場合にはほとんど明らかな結果でも、細心の注意を払い綿密な論証によって検証する必要がある。

4. 研究成果

計量退化集合を除いた半ユークリッド空間に一般ローレンツ群で不変な不定値計量を入れた半リーマン多様体に対して、熱方程式の解を保つ変換の形を詳しく解析した。

空間の次元が3以上の時に調べ、変換の歪曲度の逆数が0次または2次の変換が存在するために、不定値計量が満たすべき条件と、その場合に不定値計量の形と解を保つ変換の形とを具体的に決定することが出来た。

これらの場合を最初に、平行移動を含むかどうかで分類し、平行移動を含まない場合には、計量が半ユークリッド空間の動径方向不定値計量になり、その場合には、以前に行った動径方向半リーマン不定値計量の自身の分類と、動径方向不定値計量に関する熱方程式の解を保つ変換の決定とを組み合わせ、計量の形と変換の形を具体的に決定することが出来た。

次に、平行移動を含む場合には、半ユークリッド空間及びユークリッド空間の動径方向計量に関する変換の決定を組み合わせ、さらに例外的な場合を個々に調べることにより、計量が定曲率でなければならず、半ユークリッド計量が双曲計量かに等長であることがわかり、変換の形もそこから決定することが出来た。

空間の次元が3以上の場合には変換の

歪曲度の逆数が2次以下であることが示されており、残る1次の場合には不定値計量特有の Bateman 型変換が現れる。その場合を詳しく調べるため、Bateman 型変換の詳しい性質、写像の特徴と振舞い、変換を表すのに都合が良い座標表示、Bateman 型変換の集合の構造、反転型変換との関係を詳しく調べ、Bateman 変換と Appell 変換の関係も得られた。

今後の展望として、残る1次の場合の解決に近い所まで来たので、引き続き完全解決を目指して取組む予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

K. Shimomura, Liouville type theorem on conformal mapping for indefinite metrics associate with ultra-hyperbolic equations, *Mathematical Journal of Ibaraki University*, vol.48, 印刷中, 2016, 査読有

西尾昌治, 半空間上の多重調和関数に関する再生核について, *数理解析研究所講究録*, 1980 巻, 2016, 56-69, 査読無

N. Chiba, T. Horiuchi, Radial symmetry and its breaking in the Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities for $p=1$, *Proceedings of the Japan Academy Ser. A Mathematical Sciences*, vol.92, 51-55, 2016, 査読有

Y. Hishikawa, M. Nishio, M. Yamada, $L(\cdot)$ -Conjugates on Parabolic Bergman Spaces, *Potential Analysis*, vol.40, 2014, 525-537, 査読有

H. Ando, T. Horiuchi, E. Nakai, Weighted Hardy inequalities with infinitely many sharp missing terms, *Mathematical Journal of Ibaraki University*, vol.46, 9-30, 2014, 査読有

K. Shimomura, Generalizations of Bateman's transformation for general indefinite metrics, *Mathematical Journal of Ibaraki University*, vol.45, 7-13, 2013, 査読有

Y. Hishikawa, M. Nishio, M. Yamada, Conjugate functions on spaces of parabolic Bloch type, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, vol.65, 2013, 487-520, 査読有

[学会発表](計6件)

下村勝孝, 3次元以上の Lorentz 不変計量に対する Caloric Morphism について, ポテンシャル論とその関連分野,

2016.1.31, 北海道大学 (札幌市)
下村勝孝, 3次元以上の Lorentz 不変計量に対する Caloric Morphism について, 名城大学ポテンシャル論セミナー, 2015.12.4, 名城大学 (名古屋市)
西尾昌治, Reproducing kernel for iterated parabolic operators on the upper half space, 日本数学会 2015 年度秋期総合分科会, 2015.9.13, 京都産業大学 (京都市)
堀内利郎, 千葉奈緒希, Radial symmetry and its breaking in the Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities for $p = 1$, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 2015.9.13, 京都産業大学 (京都市)
田中清喜, 西尾昌治, 調和ベルグマン核の境界挙動, 日本数学会 2015 年度年会, 2015.3.23, 明治大学 (東京都・千代田区)
下村勝孝, 3次元以上の回転不変計量に対する Caloric Morphism, 名城大学ポテンシャル論セミナー, 2013.12.20, 名城大学 (名古屋市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

下村 勝孝 (SHIMOMURA KATSUNORI)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号: 00201559

(2) 研究分担者

西尾 昌治 (NISHIO MASAHARU)
大阪市立大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 90228156

堀内 利郎 (HORIUCHI TOSHIO)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号: 80157057

安藤 広 (ANDO HIROSHI)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号: 60292471

(3) 連携研究者

鈴木 紀明 (SUZUKI NORIAKI)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号: 50154563