

令和元年6月9日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2018

課題番号：25400128

研究課題名(和文) フラクショナル・ブラウン運動の滞在時間に関する極限定理の研究

研究課題名(英文) Study on occupation times of fractional Brownian motion

研究代表者

小杉 のぶ子 (Kosugi, Nobuko)

中央大学・経済学部・教授

研究者番号：20302995

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：正規性と自己相似性をもつ確率過程であるフラクショナル・ブラウン運動の分布は、期待値と分散により決定される。このことから、 n 次元フラクショナル・ブラウン運動の滞在時間に関する問題へのアプローチとして、その共分散行列の漸近挙動について研究を進めた。本研究で扱ったのは、フラクショナル・ブラウン運動の自己相似性の指数 H が $1/2 < H < 1$ の場合であり、このときに共分散行列の行列式が評価できることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

フラクショナル・ブラウン運動の自己相似性の指数 H は $0 < H < 1$ の範囲で定義されているが、これまでの滞在時間に関する研究においては、指数を $0 < H < 1/2$ に限定したものが多かった。これは、 $1/2 < H < 1$ の場合に、フラクショナル・ブラウン運動の共分散行列の行列式を下から評価することが難しいことによる。そこで本研究では、 $1/2 < H < 1$ の場合に、共分散行列の行列式がある意味において下から評価できることを示した。

研究成果の概要(英文)：Fractional Brownian motion is a self-similar Gaussian process, and hence its distribution is determined by expectation and variance.

To study on occupation times of n -dimensional fractional Brownian motion, we need to consider the asymptotic behavior of its covariance matrix.

Thus, we showed an evaluation of determinant of covariance matrix of n -dimensional fractional Brownian motion with Hurst parameter H ($1/2 < H < 1$).

研究分野：確率論

キーワード：共分散行列 フラクショナル・ブラウン運動

1. 研究開始当初の背景

- (1) ブラウン運動の滞在時間については、Kallianpur と Robbins の二人が有名な結果を 1953 年に発表した。(G. Kallianpur and H. Robbins, Ergodic property of the Brownian motion process, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 39 (1953) 参照。) この後、多くの研究者により、ブラウン運動のもつマルコフ性に着目した形でこの定理の拡張が行われてきた。
- (2) マルコフ性に着目した研究は 1980 年頃まで行われ、それらが一段落した後、1996 年に N. Kôno が、ブラウン運動の持つ正規性と自己相似性に着目したものである、フラクショナル・ブラウン運動の滞在時間の一次元分布の収束を示した。(N. Kôno, Kallianpur-Robbins law for fractional Brownian motion, Proc. 7th Japan-Russia Symp. Probab. Math. Stat. (1996) 参照。) Kôno の論文では、フラクショナル・ブラウン運動の見本過程が point recurrent となる場合には、フラクショナル・ブラウン運動の持つ自己相似性と局所時間の存在から、滞在時間の極限の一次元分布の収束について直ちに結論が導かれることが述べられている。そこで研究代表者は、point recurrent なフラクショナル・ブラウン運動を含むようなガウス過程に対して、滞在時間の関数型極限定理を導きだした。(N. Kosugi, Functional limit theorem for occupation times of Gaussian processes - non-critical case, Osaka Journal of Mathematics 36 (1999)参照。)
- (3) 研究代表者は、滞在時間に関する研究から派生したものとして、フラクショナル・ブラウン運動の標準化した増分の共分散行列の漸近挙動に関する結果を導いた。この研究において、ガウス過程の共分散行列の行列式を下から評価する必要が出てきたが、計算の都合上、フラクショナル・ブラウン運動の自己相似性の指数 H について $0 < H < 1/2$ と条件をつけることとした。しかし、本来ならばこの条件は取り除かれるべきであり、もっと一般的な条件のもとで同様の結果が成り立つのではないかと考えていた。

2. 研究の目的

一般にフラクショナル・ブラウン運動の自己相似指数 H は $0 < H < 1$ の範囲で値をとるが、 $H = 1/2$ の場合に通常のブラウン運動となる。これまでの研究で、 $0 < H < 1/2$ の場合については、関数型極限定理や共分散行列の行列式の漸近挙動などについての結果が得られている。フラクショナル・ブラウン運動はガウス過程であるため、その分布は、期待値と分散で決定される。よって、 n 次元フラクショナル・ブラウン運動の共分散行列の漸近挙動の研究は重要である。

フラクショナル・ブラウン運動は今後、様々な分野に応用されることが期待される。

したがって、その共分散行列の漸近挙動について研究することにより、あるクラスのガウス過程についての滞在時間、あるいは別の形の極限定理にも適用して、新たな結果が得られると考えた。また、今まで $0 < H < 1/2$ と制約をつけてきた自己相似指数 H に関する条件を緩和することにより、応用できる範囲を広げられると期待した。

3. 研究の方法

フラクショナル・ブラウン運動の共分散行列の漸近挙動を調べるにあたり、今まで用いてきた評価式 (M. Csörgő, et al., On moduli of continuity for local times of Gaussian processes, Stochastic Processes and their Applications 58 (1995) 参照) を用いずに、どのように共分散行列の行列式を評価できるかについて研究を進めた。目標は、フラクショナル・ブラウン運動の自己相似指数の全範囲 $0 < H < 1$ における行列式の評価である。 $0 < H < 1/2$ の場合に行列式を評価することはできるのであるが、 H が $1/2$ を超えると同様の手法が使えないため、行列式を評価することが難しくなる。そこで、行列式を応用で多く用いている工学系の論文なども参照しながら、そこから派生した問題についても研究を進めた。

また、実際に必要とする評価式についての結果が得られない中、今度は具体的に数値計算を行い、フラクショナル・ブラウン運動の増分の共分散行列の行列式が、 $1/2 < H < 1$ の場合にも何か一定の値で下から抑えられそうであることは予測できた。

その後は、代数分野における行列式関連の論文を参照して様々な計算を行うという方法で研究を進めた。

4. 研究成果

- (1) 行列式の評価の仕方について研究を進める中で、工学の分野での成果も含め幅広く文献に当たっていた際に派生した問題として、二変量多項式行列に関する Bezout 方程式についての結果を得た。具体的には、二変量の関係が整関数であらわされ、二変量多項式行列に関する Bezout 方程式を一変量多項式行列に関するものに帰着させることができる場合について調べ、具体的な計算の手法について示した。さらに、多変量多項式行列に関する Bezout 方程式の解法についても取り組んだ。二変量の場合と比較して、多変量多項式行列の場合はかなり難しくなるが、これについても新たな結果を得た。

- (2) フラクショナル・ブラウン運動の滞在時間の漸近挙動を調べる際に必要となる、共分散行列の行列式の評価方法について模索した。フラクショナル・ブラウン運動の自己相似指数 H ($0 < H < 1$) が $1/2$ 以下である場合には、共分散行列が dominant principal diagonal をもつため、この性質を利用して行列式を下から評価できていることがわかった。本研究では、フラクショナル・ブラウン運動の自己相似指数 H が $1/2$ よりも大きい場合について扱ったのだが、この場合には共分散行列は dominant principal diagonal のようなよい性質をもたず、行列式の下からの評価をどのようにすればよいか問題となった。代数系の論文を調べたところ、行列式の下からの評価について扱っているものは非常に少なかったのだが、その中で行列の固有値を用いて行列式を下から評価しているものがあった。そこで、フラクショナル・ブラウン運動の標準化した増分の共分散行列、すなわち相関行列にこの結果を適用し、フラクショナル・ブラウン運動の自己相似指数 H が $1/2$ より大きい場合について、相関行列の行列式が下から評価できることを示した。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 4 件)

Nobuko Kosugi, A note on the correlation matrix of fractional Brownian motion, International Mathematical Forum, 査読有, Vol. 14, 2019, 69-72.

DOI: 10.12988/imf.2019.917

Koichi Suyama and Nobuko Kosugi, A new approach to Bezout equations derived from multivariate polynomial matrices and real entire functions, Linear and Multilinear Algebra, 査読有, Vol. 63, 2015, 2318-2331.

DOI: 10.1080/03081087.2015.1008969

Koichi Suyama and Nobuko Kosugi, Bezout equations over bivariate polynomial matrices related by an entire function, Linear and Multilinear Algebra, 査読有, Vol.63, 2015, 1138-1153.

DOI: 10.1080/03081087.2014.922968

Nobuko Kosugi and Koichi Suyama, Digital redesign of infinite-dimensional controllers based on numerical integration of new representation, Systems & Control Letters, Vol.62, 査読有, 2013, 531-538.

DOI: 10.1016/j.sysconle.2013.03.007

〔学会発表〕(計 0 件)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

出願年 :

国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

取得年 :

国内外の別 :

〔その他〕

ホームページ等

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。