

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 8 月 25 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400131

研究課題名(和文) トロピカル Nevanlinna-Cartan 理論の完成と複素解析的手法への還元

研究課題名(英文) Formulations of the tropical Nevanlinna-Cartan theory and their returns for complex analytic methods

研究代表者

藤解 和也 (Tohge, Kazuya)

金沢大学・電子情報学系・教授

研究者番号：30260558

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：解析的な函数はそのべき級数表示を通して数学のみならず理工学の幅広い分野で利用されている。それらの多くは複素平面全体に有理型に接続でき、指数函数や楕円函数などの特徴的な方程式の解として与えられる。これら超越函数を統一的に取り扱うため Rolf Nevanlinna が値分布論を完成して 90 年が経過した。本研究では解析函数のみがこれら応用を実現し得るのかとの問題を、Nevanlinna 理論さらにはその正則曲線への拡張である Henri Cartan の値分布理論を、実数直線上で定義された区分的線型な連続関数と正則曲線の値分布論に変換し、その max-plus べき級数展開からも類似した応用可能性を確認した。

研究成果の概要(英文)：There are known many applications of analytic functions not only to mathematics but also to a broad range of fields in science and engineering, where the essential role is played by power series expansion. Actually, most of them are functions which permit meromorphic continuation over the whole complex plane and solve some distinctive equations such as differential equations for exponential or elliptic functions. It was 90 years ago when Rolf Nevanlinna established his theory on value distribution of the transcendental meromorphic functions. Our study observed the question whether such contributions can be done only with complex analysis or there is a possible replacement of the role. It is our main result that we have formulated the tropical analogues of the complex analytic counterparts as a sort of dictionary in a satisfactorily fashion for our purpose. In fact, it is found that there is a chance for similar applications by some tropical entire functions with max-plus series expansion.

研究分野：複素解析

 キーワード：Nevanlinna 理論 有理型函数 値分布論 微分方程式 トロピカル数学 max-plus 代数 超離散方程式
国際交流者研究

1. 研究開始当初の背景

トロピカル代数 = max-plus semi-ring は $x \oplus y := \max\{x, y\}$ と $x \otimes y := x + y$ で加法と乗法が定義された集合 $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ が成す系で、加法に逆元は存在しない。二項演算 \oplus と \otimes は通常の演算 $+$ と \times を含んだ式の超離散化という極限操作により得られている。max-plus 代数は 50 年以上の歴史を持ち、起源は S. C. Kleene [4] にまで遡る。トロピカル数学の最近の研究対象は組合せ論、数理物理学、代数幾何等多岐に渡る。超離散方程式は既知の差分方程式の超離散化として得られ、トロピカル代数を用いて表現される。例えば超離散パルベ方程式は差分パルベ方程式のトロピカル版である。可積分な差分方程式と有理型関数のネバンリンナ理論との関連が Ablowitz, Halburd and Herbst [1] により明らかにされ、差分方程式に対するパルベ性の候補に、位数が有限な有理型関数解を十分に豊富に有するという性質が提案された。その考察は Halburd and Korhonen [2] により発展させられた。いずれの論文ともネバンリンナ理論の果たす役割が考察の決め手となる。トロピカル代数上で区分的線型な連続関数により超越的な有理型関数を定義し、そのネバンリンナ理論の可能性を論じたのは Halburd and Southall [4] である。彼らによって、ネバンリンナ理論で必須な汎関数のトロピカル版が、古典的なネバンリンナの関数の超離散化として解釈できることが見出された。本課題研究代表者は研究協力者の一人とともに論文 [5] に於いて、第 2 主要定理と呼ばれる重要な評価式の証明を含め、その理論の拡張を行った。

<引用文献>

- [1] M. J. Ablowitz, R. G. Halburd, and B. Herbst, Nonlinearity 13 (2000), 889--905.
- [2] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, Proc. London Math. Soc. 94 (2007), no. 2, 443--474.
- [3] R. G. Halburd and N. J. Southall, Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no. 5, 887--911.
- [4] S. C. Kleene, Annals of mathematics studies, no. 34, Princeton Univ. Press, 1956, pp. 3--41.
- [5] I. Laine and K. Tohge, Proc. London Math. Soc. 102 (2011), no. 5, 883--922.

2. 研究の目的

主たる目的は、前節で引用した論文 [5] に於けるトロピカル・ネバンリンナ理論の研究をさらに拡充させることであった。その成果を基礎に、古典的なネバンリンナ理論が効果的に活用されているある種の常微分方程式に関する研究手法を手本に、超離散方程式や複素差分方程式の研究に同様なアプローチを適用して類似した評価式の導出を目指した。両分野には緊密な類似性が期待されているが、同時に全く相容れない現象や異なる性質

が出現することは十分あり得る。それを重要な示唆とし、一方の分野に於ける未解決部分を、他方で成功した手法を対応性に着目し適宜修正・変更して適用することで解明することが理想である。特に、代数的構造が単純で諸現象が「線型的」になるトロピカルな世界で得られた証明法を、複素解析的な議論に還元することで古典的理論の発見し、それを以て多変数トロピカル・ネバンリンナ理論研究の端緒とすることを最終目標としている。具体的には以下の研究項目を対象とした。

(1) 有限区間に於けるトロピカル・ネバンリンナ理論の予備的な調査・研究の完成。特に、hyperbolic shift として見つけ出した一次分数変換が与える諸現象についての自然な解釈を与えること。それは本質的に「有限区間上のトロピカル有理型関数をどう定義すれば超離散方程式の解として自然か」という問題への答えと同等で、可積分である新たな複素差分方程式の発見に結びつくことが期待される。

(2) カルタン版のトロピカル・ネバンリンナ理論の予備的な調査・研究の完成。更に代数多様体へのトロピカル正則曲線に対する拡張を目指す。可積分な連立超離散方程式の分類などへの応用も試みる。

(3) 超離散方程式のトロピカルの意味での有理型関数解についての研究。可積分な複素差分あるいは微分方程式を超離散化することでより多くの可積分な超離散方程式を収集し、その値分布論的な性質と素となる複素関数の性質とを比較する。パルベ性に関する先行研究から示唆を得ることを期待する。

(4) トロピカルな有理型関数の反復合成についての研究。トロピカルの設定に於いても、合成作用の下に有理型性は保たれる。しかしながら当該分野の研究は殆ど未着手で、上記 (1) の有限区間上でネバンリンナ理論が、トロピカルな設定での複素力学系の研究に結びつくことを期待し、トロピカル整関数での現象について観察する。

(5) 研究代表者は Korhonen, Laine 両教授と共著で、トロピカル・ネバンリンナ理論とその紹介および応用可能性など上記項目 (1)-(5) に関する研究成果を網羅して本研究期間中に出版させる。

3. 研究の方法

本研究の中核部分は、Laine 教授と Korhonen 教授との共同研究によるトロピカル代数上で定義された有理型関数あるいは射影トロピカル空間への正則曲線に関する値分布理論、いわゆるトロピカル・ネバンリンナ・カルタン理論の完成と超離散方程式への適用、更にはその成果の複素差分方程式の研究への還元を試みである。海外研究協力者と互いの多忙を縫い、時差を意識しながら日々電子メールによる研究連絡を行う中、年に 1, 2 回はどうにも対処し尽くせないような繊細な評価や微妙な推論に突き当たったり、急な

研究意識や方向性への意識の調整や新たに生じた問題点の共有と検討、その解決に向けた情報交換の必要性が生じたりする。それには一定の空間と時間を共有し集中的な議論を行うことが絶対に欠かせず、実際、この迄の共同研究に於いて重要な成果の殆どがこうして得られてきた。そのため海外共同・協力研究者の金沢大学への招聘、研究代表者の東フィンランド大学への訪問と成果発表、連携研究者との研究連絡などを有機的に組合せて本研究計画を遂行した。

海外研究者のうち特に Laine, Korhonen 両教授とは本応募課題の中核をなす共同研究を実施した。複素線型微分方程式の係数や解に関する指数関数の役割について新たな知見を得るべく Heittokangas 博士との共同研究を並行して行い、その超離散版の可能性を検討していった。これら東フィンランド大学の研究者達とは長年築き上げた研究協力と信頼関係があり、近年の共同研究でその関係は有機的に高められている。本課題3年間の協力体制では、国境を越えて人と人とが直接対峙し、各自の着想や結果を忌憚なく批判・評価し合える環境を築いていった。具体的には、

(1) 有限区間におけるトロピカル・ネバンリンナ理論に関して、Laine 教授と共同して、Tropical Nevanlinna theory in a single variable の研究を完成させる。そのため hyperbolic shift の候補として得た一次分数変換を観察し、その本質を解明することで、円板上の値分布理論の超離散化に迫る。

(2) カルタン版のトロピカル・ネバンリンナ理論について、Korhonen 教授と共同して、Tropical Nevanlinna-Cartan theory で用いている定義の適切さと定理の改良の可能を、複素解析学とトロピカル数学の複眼的視点で推敲と吟味し、トロピカル正則曲線に関する理論の拡張に向け理論の基盤強化を図る。

(3) 超離散方程式のトロピカル有理型関数解の研究を、可積分な複素差分・微分方程式を「超離散化」し、可積分な超離散方程式を収集することから開始する。それぞれの解について値分布論的な性質を調査・比較して、ネバンリンナ理論の言葉によるそれらの可積分条件についての記述を目指す。

以上の研究で得られた成果を、可能な限りトロピカル・ネバンリンナ理論に関する著書に反映させる。それらを簡潔かつ平明に解説できるよう用語の精査や適用例の考案の他、周辺の研究領域との関連性、更には理工学より広い分野への応用の可能性について検討する。

4. 研究成果

本研究課題における最大の成果は、目標としていた下記書籍の出版である：

Korhonen, Risto; Laine, Ilpo and Tohge, Kazuya, Tropical Value Distribution Theory and Ultra-Discrete Equations.

World Scientific Publishing Company, 280pp, 2015.

この書籍には、トロピカル値分布理論における主要定理の証明を完成した論文

I. Laine and K. Tohge, Proc. London Math. Soc. 102 (2011), no. 5, 883--922.

等の紹介ではなく、それらを発展させ新たに書き起こした部分が多く含まれる。特に、Nevanlinna による複素平面上の値分布理論と実数軸上で定義された区分的線型な連続関数に関する上記理論にはある種の「辞書」に類する明快な対応関係が存在するのではないかとの仮説をもとに、例えば「Cartan の定理」と呼ばれる恒等式をその辞書に沿った定式化を行い、証明した。ここで重要なことは、諸概念の定義が超離散化を通して対応する複素数体と max-plus 代数との読み替えにより得られるのみではなく、証明に於ける論法もまたその読み替えによって明確な対応が見出せるということであった。つまり、対応する事象が1対1に対応しているだけではなく、その基本的な理論構成にも本質的な対応が見出されることから、一方では既に得られていながら、他方では未知の結果について、そこにあり得べき主張と共にその証明の基本的な論理構成も予測し得ることが見出せたことになるのである。その根拠となる本質的な事実の一つは、Halburd 及び Southall や Laine と本報告者によるトロピカル値分布論を提案した論文で確認された Poisson-Jensen の定理とそのトロピカル版が自然な形で成立し、それを「苗」としてそれぞれの理論が対応する用語や基本的な評価を成長の糧として大きく枝を茂らせたことであった。本課題の研究では、論文

K. Tohge, The order and type formulas for tropical entire functions - Another flexibility of complex analysis. Reports and Studies in Forestry and Natural Sciences, 14 (2014), 113-164.

で、形式的べき級数を max-plus 代数により書き換え、有界区間上で無限個の折れ線で定義される連続な実数値凸関数を考察し、それがトロピカルの意味で整関数となり複素整関数の理論、特に係数と増大度の関係について同一の形をした評価式の成立を確認したことがもう一つの事実である。このように超離散化が決して特殊な極限操作でないことを、値分布論が逐語翻訳の形で完成でき、またそれぞれの級数表示に対する微分及び差分演算の作用の類似性が存在するとの観点から、上記書籍ではより明快にこの理論の提示ができていたものと期待する。

更に、超離散方程式に関する考察では、新規の発見には至らなかったが、解の max-plus 級数表示の可能性や増大度の評価について既知の方程式とその解を対象として考察を行い、別の観点での解釈を試みた。特に q-差分作用素と超離散作用素との「書き換え規則」が存在の確認により、提案されているあ

る超離散パンルベ関数から対応する q -パンルベ超越関数の表示を確認することなども試みることができた。これらの研究には本課題の開始前に行った2件の招待講演とそれらの研究集会ででの経験が大きな影響を齎している。一つ目はギリシャで開催された非線形発展方程式と力学系に関するもので、井上玲氏(千葉大)主催のセッションでトロピカル値分布論を紹介し、同氏を初め高橋大輔先生(早稲田大学)から有益な示唆を得、また野邊厚氏(千葉大学)、梶原健司先生(九州大学)を初め多くの参加者との交流を通して今後の方向性が確認できたことが深く影響している。上記の著書は共著であることからその謝辞を述べる機会が得られなかった。敢えてここに記載することで感謝の念を表す。また、トロピカル整函の着想は、Laine 教授の古稀を祝う国際研究集会が東フィンランド大学に於いて開催され、複素整関数の級数表示と増大度の関係について講演した際、中国人研究者から出された質問が max-plus 級数で定義される超離散的な凸関数の増大度の関係に関する研究のヒントになり、先の単著論文はその集会の記念号に発表したものである。その考察を凸関数の視点からの再検証を書籍には含めている。

この書籍出版後には、トロピカル射影空間への正則曲線の値分布理論をより詳細に議論した結果を

R. Korhonen; K. Tohge, Second main theorem in the tropical projective space, *Advances in Mathematics*, 298(2016), no. 6, 693-725

で発表した。また、複素解析学に於ける典型的な結果のいくつかを、トロピカル関数の観点から書き直すという方針のもとに、函数方程式の有理型函数解を対象にした書き換えについて研究して、

I. Laine; K. Liu; K. Tohge, Tropical variants of some complex analysis results, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 41(2016), no.2, 923-946.

にまとめた。これらは上記書籍を完成する過程で動機づけられた研究の成果であり、現在も引き続き研究を進行している。

一方、有界区間に於けるトロピカル値分布理論の完成は本研究課題期間に完成させることはかなわなかった。それは、有力だと考えていたシフト作用素が区分的線型を維持しなければならないという要請にこたえることができず、それに対する修正が何れも上手くいかなかったことが理由である。しかし、この報告書を記載するにあたって、その完全な解決策を見出すことができ、それが正に期待通りの機能を果たし目的の完遂に至ったことを付記する。現在その論文は Laine 教授との共著として投稿中である。そのため、「トロピカル力学系」に関しては本研究課題では得られていないが、研究の方向性や翻訳すべき基本定理は見出すことができ、引き

続き考察をして成果に結び付けたい。

最後に、本研究では複素解析学への成果の還元も目標に掲げていたが、以下2件の論文でその目標の一部を達成している：

R. Kohonen; N. Li; K. Tohge, Difference analogue of Cartan's second main theorem for slowly moving periodic targets, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 41 (2016), no.2, 523-549.

J. Heittokangas; I. Laine; K. Tohge; Z.-T. Wen, Completely regular growth solutions of second order complex linear differential equations. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 40(2015), no. 2, 985-1003.

尚、これらを含めて4つの論文が Finland Academy や東フィンランド大学の紀要で発表され、5つの論文で本課題の海外共同研究者とした3名との共著であることから明らかのように、本研究費補助金によって実施された国際交流研究こそが当該年度に於ける報告者の研究を支えていた。このことについて衷心からの感謝を記して、本報告書の成果についての報告を終える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6件)

Risto KORHONEN, Kazuya TOHGE, Second main theorem in the tropical projective space, *Advances in Mathematics*, 査読有、Vol. 298, No.6, 2016, 693-725, <http://doi.org/10.1016/j.aim.2016.05.003>

Risto KORHONEN, Nan LI, Kazuya TOHGE, Difference analogue of Cartan's second main theorem for slowly moving periodic targets, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 査読有、Vol. 41, No.2, 2016, 523-549. DOI:10.5186/aasfm.2016.4131

Ilpo LAINE, Kai LIU, Kazuya TOHGE, Tropical variants of some complex analysis results, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 査読有、Vol. 41, No.2, 2016, 923-946. DOI:10.5186/aasfm.2016.4159

Janne HEITTOKANGAS, Ilpo LAINE, Kazuya TOHGE, Zhi-Tao WEN, Completely regular growth solutions of second order complex linear differential equations. 査読有、*Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* Vol.40, No. 2, 2015, 985-1003. DOI:10.5186/aasfm.2015.4057

Rod HALBURD, Risto KORHONEN, Kazuya TOHGE, Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages, *Trans. American*

Math. Soc. 査読有 Vol. 366、No.8、 2014、
4267-4298.

Kazuya TOHGE,

The order and type formulas for tropical entire functions - Another flexibility of complex analysis, Proceedings of the Workshop on Complex Analysis and its Applications to Differential and Functional Equations: in the honour of Ilpo Laine's 70th birthday, Publications of the University of Eastern Finland. Reports and Studies in Forestry and Natural Sciences, 査読有、Vol.14、2014、113-164.

http://epublications.uef.fi/pub/urn_isbn_978-952-61-1353-1/urn_isbn_978-952-61-1353-1.pdf

〔学会発表〕(計 7件)

Kazuya TOHGE

Meromorphic functions that share four or five pairs of values, The Mathematics research seminar, University of Eastern Finland, Joensuu, Finland, 2017年3月24日

Kazuya TOHGE

Meromorphic functions that share four or five pairs of values (joint work with Gary G. Gundersen and Norbert Steinmetz), 平成 28 年度等角写像論・値分布論研究集会, Joint Meeting on Conformal Mappings and Value Distribution Theory, 千葉大学、千葉市、2017年1月21日、

Kazuya TOHGE

General solution to linear difference equations and a simple algorithm to solve them by piecewise linear and continuous functions, The Mathematics research seminar, University of Eastern Finland, Joensuu, Finland, 2016年3月30日、

Kazuya TOHGE

Tropical value distribution on a finite interval, The 23rd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 九州産業大学、福岡市、2015年8月15日、

Kazuya TOHGE

From Nevanlinna's value distribution theory and function theory to Tropical value distribution theory and max-plus function theory, The Mathematics research seminar, University of Eastern Finland,

Joensuu, Finland, 2015年3月30日、

Kazuya TOHGE

From Nevanlinna theory and function theory to Tropical Nevanlinna theory and max-plus function theory, 平成 26 年度 等角写像論・値分布論研究集会、幕張メッセ 国際会議場、千葉市、2015年2月7日、

Kazuya TOHGE

The Order and Type Formulas for Tropical Entire Functions, The Mathematics research seminar, University of Eastern Finland, Joensuu, Finland, 2014年11月18日。

〔図書〕(計 1件)

Risto KORHONEN, Ilpo LAINE, Kazuya TOHGE, Tropical value distribution theory and ultra-discrete equations. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 査読有 2015. xi+266 pp. ISBN: 978-981-4632-79-9

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕

ホームページ等 無

6. 研究組織

(1)研究代表者

藤解 和也 (TOHGE, Kazuya)
金沢大学・電子情報学系・教授
研究者番号: 30260558

(2)連携研究者

下村 俊 (SHIMOMURA, Shun)
慶応義塾大学・理工学部・教授
研究者番号: 00154328

石崎 克也 (ISHIZAKI, Katsuya)
放送大学・教養部・教授
研究者番号: 60202991

(4)研究協力者

Ilpo LAINE,
東フィンランド大学・物理数学科・
名誉教授

Risto KORHONEN,
東フィンランド大学・物理数学科・教授

Janne HEITOKANGAS,
東フィンランド大学・物理数学科・准教授