

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 9 日現在

機関番号：13701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400133

研究課題名(和文) 放物型方程式の解からなる関数空間の研究

研究課題名(英文) Investigation of function spaces of solutions of parabolic equations

研究代表者

山田 雅博 (Yamada, Masahiro)

岐阜大学・教育学部・教授

研究者番号：00263666

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：共役調和関数の性質について研究を行った。ここでは、放物型ベルグマン空間において研究した放物型共役関数をモデルにして、放物型ハーディー空間においても同様の概念を持つ関数を定義し、それらについて研究した。特に、 $p=1$ のときの放物型ハーディー空間の解析は難しいであろうことが予想される。この解析は、調和関数からなるハーディー空間においても大変難しい部分があり、我々は、これと深い関係にある放物型ブロッホ空間における放物型共役調和関数についても研究を行い、その一意性やノルム評価などの結果を非常に美しい形で示した。

研究成果の概要(英文)：We study properties of p -parabolic conjugate functions. We introduce the notion of conjugacy to p -parabolic Bergman spaces. In this study, we define p -parabolic conjugate functions of parabolic Hardy spaces. Study of p -parabolic conjugate functions of parabolic Hardy spaces is difficult for the case of $p=1$. Therefore, we study p -parabolic Bloch spaces and give an application to the estimates of tangential derivative norms.

研究分野：解析学

キーワード：放物型ハーディー空間 放物型ブロッホ空間 放物型共役調和関数 双対空間

1. 研究開始当初の背景

近年、ユークリッド空間 R^{n+1} の上半空間において定義された放物型ベルグマン空間という新しい関数空間が導入され、放物型ベルグマン空間について様々な研究がなされてきた。まず、それらの経緯について簡単に述べる。放物型方程式 $L^{\lambda}\{ \}u = 0$ の解 u を $L^{\lambda}\{ \}$ -調和関数と呼ぶ。放物型ベルグマン空間とは、 $L^{\lambda}\{ \}$ -調和で、かつ上半空間において p -乗可積分な関数 u からなる空間のことをいう。特に、 $\lambda = 1/2$ のときに調和関数からなるベルグマン空間に一致する。 $\lambda = 1/2$ のときは特殊な場合であり、有用な性質が数多くあって研究しやすい。放物型方程式 $L^{\lambda}\{ \}u = 0$ は、 $0 < \lambda < 1$ について扱われるので、調和関数からなるベルグマン空間をさらに一般化して捉えなおしたものが放物型ベルグマン空間であるといえる。これまで、この研究計画調書の研究業績欄に記入したように、申請者や連携研究者も放物型ベルグマン空間について研究を行い、幾つかの結果を得てきた。以上がこれまでの経緯である。

以上を踏まえ、本研究の目的について述べる。本研究の目的は、 R^{n+1} の上半空間において定義された放物型ハーディー空間について様々な方面から解析を行い、その空間の性質を明らかにすることである。放物型ハーディー空間とは、 $L^{\lambda}\{ \}$ -調和で、かつ

$$\sup_{t>0} \int |u(x,t)|^p dx < \infty$$

を満たす関数 u からなる空間のことである、ここで x は R^n の要素、 t は R の要素を表す。これまで、放物型ベルグマン空間については様々な研究がなされてきたが、放物型ハーディー空間については、ほとんど研究がなされていない。放物型ハーディー空間についても、 $\lambda = 1/2$ のときに調和関数からなるハーディー空間に一致することが知られている。調和関数からなるハーディー空間についての研究は、フェファーマンやシュタインらによる非常に有名な結果がある。我々

は、これまでの放物型ベルグマン空間に関する研究を参考に、放物型ハーディー空間について、フェファーマンやシュタインらのような解析を試みる。

2. 研究の目的

ユークリッド空間 R^{n+1} の上半空間において定義された関数空間の解析を行う。具体的には、放物型方程式 $L^{\lambda}\{ \}u = 0$ の解 u からなる放物型ハーディー空間の解析を行う。放物型ハーディー空間は、 $\lambda = 1/2$ のときに調和関数からなるハーディー空間に一致し、これは良く研究されてきた。我々は、近年に導入されたより一般的な放物型ハーディー空間について、様々な方面から解析を行う。

(1) $L^{\lambda}\{ \}$ -調和な拡張関数と放物型極大関数について

$L^{\lambda}\{ \}$ -調和な関数からなる関数空間の解析において、重要な役割を果たすのは、放物型作用素 $L^{\lambda}\{ \}$ の基本解である。特に、 $\lambda = 1/2$ のときの基本解は、ポアソン核となることが知られている。それ以外のときの基本解については、具体的には記述されていない(ただし、 $\lambda = 1$ のとき、 $L^1\{ \}$ は熱方程式となるので基本解が記述できる)。本研究では、 $L^{\lambda}\{ \}$ の基本解と R^n で定義された関数とのコンボリューションを考え、それを $L^{\lambda}\{ \}$ -調和な拡張関数と呼び、それらの関数の性質について研究する。

(2) 放物型共役関数の解析

調和関数からなるハーディー空間で重要な研究対象となったのは、共役調和関数の性質である。共役調和関数と極大関数の性質は深く結びついており、幾つかの有名な研究がある。ここでは、放物型ベルグマン空間において研究した放物型共役関数をモデルにして、放物型ハーディー空間においても同様の概念を持つ関数を定義し、それらについて研究する。

(3) 放物型ハーディー空間上の作用素の研究

調和関数からなるハーディー空間におい

て、トエプリッツ作用素やハンケル作用素が詳しく研究されている。本研究でも、放物型ハーディー空間の解析を行ったあとで、それらの研究結果の応用例として、放物型ハーディー空間上でトエプリッツ作用素やハンケル作用素を定義し、それらに関する研究を行う予定である。主に、有界性、可逆性、コンパクト性やその他の性質について調べる。

3. 研究の方法

放物型ハーディー空間の性質の研究については、研究対象としたい問題について、予想される結果や意義、さらにそれらを用いた発展などについて、これまでのベルグマン空間に関する研究を参考に綿密な議論を行う。その上で、各自の研究分担の範囲を明確にする。その後、連携研究者らと役割を分割して研究を行う。

(1) L^p -調和な拡張関数と放物型極大関数との関連性、及びハーディー・リトルウッド型の極大関数との関連性を調べ、ファトゥー型の境界極限存在定理などについての研究へとつなげていく。

(2) ファトゥー型の境界極限存在定理などの研究、 $p=1$ のときの放物型ハーディー空間の双対空間の研究などを行う。

4. 研究成果

(1) 放物型ハーディー空間における放物型共役関数について調べた。これまで、放物型ベルグマン空間における放物型共役関数に関する共同研究を行ってきた。ここでは、その研究を参考に放物型ハーディー空間においても同様の概念を持つ関数を定義し、それらについて研究を行った。特に、 $1 < p < \infty$ のときについて共役関数の存在性、一意性について明確に示した。また、ノルムの評価式も非常に良い形で与えた。

(2) L^p -調和な拡張関数とハーディー・リトルウッド型の極大関数との関連性についても考察を行った。ここでは、 $1 < p < \infty$ のときについて、 L^p -調和な拡張関数と

ハーディー・リトルウッド型の極大関数のノルムの同値性について、解りやすい評価式を与えた。

(3) 放物型プロッホ空間のける共役関数の性質について、考察した。過去の研究で示した共役関数の定義をより整合性の高いものに改良し、それを用いて共役関数の一意性、存在性、ノルム評価を与えた。また、過去の研究結果との関連性を研究し、これについても明らかにすることに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

(1) M. Nishio, N. Suzuki, and M. Yamada, Fractional calculus and L^p -conjugates on parabolic Hardy spaces, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, Vol.77, 371--391 (2015).
(査読有り)

(2) Y. Hishikawa, M. Nishio, and M. Yamada, L^p -conjugates on parabolic Bergman spaces, *Potential Anal.*, Vol.40, 525--537 (2014).
(査読有り)

(3) Y. Hishikawa, M. Nishio, and M. Yamada, Conjugate functions on spaces of parabolic Bloch type, *J. Math. Soc. Japan* Vol.65, 487--520 (2013).
(査読有り)

(4) Y. Hishikawa, M. Nishio, and M. Yamada, Positive Toeplitz operators of finite rank on the parabolic Bergman spaces, *Kodai Mathematical Journal*, Vol.36, 38--49 (2013).
(査読有り)

[学会発表](計4件)

(1) 西尾昌治, 菱川洋介, 山田雅博
 L^p -conjugates on parabolic Bloch spaces
日本数学会
筑波大学
2016年3月16日

(2) 西尾昌治, 菱川洋介, 山田雅博
 L^p -conjugates on parabolic Bloch spaces
ポテンシャル論研究集会
名城大学サテライトキャンパス
2015年9月22日

(3) 菱川洋介, 西尾昌治, 山田雅博
放物型ハーディ空間における放物型共役関数
ポテンシャル論セミナー
岐阜大学
2014年11月2日

(4) 菱川洋介, 西尾昌治, 山田雅博
放物型ハーディ空間とエリア関数
ポテンシャル論研究集会
北海道大学
2013年8月29日

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等:なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 雅博 (Yamada, Masahiro)
岐阜大学・教育学部・教授
研究者番号：00263666

(2) 連携研究者

菱川 洋介 (Hishikawa, yosuke)
岐阜大学・教育学部・助教
研究者番号：50585081

(3) 連携研究者

山本 隆範 (Yamamoto, Takanori)
北海学園大学・工学部・教授
研究者番号：60182630

(4) 連携研究者

西尾 昌治 (Nishio, Masaharu)
大阪市立大学・理学研究科・准教授
研究者番号：90228156