

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 31 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400134

研究課題名(和文) 汎関数により表現される消散構造をもつ非自励な微分方程式系に対する適切性

研究課題名(英文) Well-posedness for nonautonomous differential systems with dissipativity structure described by metric-like functionals

研究代表者

田中 直樹 (TANAKA, Naoki)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号：00207119

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、連続作用素に支配される非自励な微分方程式に対する適切性を、距離に似た汎関数による消散条件、接線条件、定義域の連結性条件により特徴づけた。必ずしも連続とは限らない作用素の場合の研究への模索として、高村、Brezisにより展開された極大単調作用素に支配される自励な発展方程式に関する適切性定理を拡張した。また、発展方程式の枠組みの拡張として、遅れを考慮した関数微分方程式系の適切性定理、及び、存在性の問題に焦点を当てた、弱連続作用素に支配される発展方程式に対する解の存在定理を考察した。

研究成果の概要(英文)：We characterize the well-posedness for nonautonomous differential equations governed by continuous operators, using dissipativity conditions with respect to metric-like functionals, subtangential conditions and connectedness conditions. Toward to the non-continuous case, we generalize the celebrated well-posedness result on autonomous differential equations governed by maximal monotone operators due to Komura and Brezis. Moreover, we discuss the well-posedness for functional differential equations and the solvability of abstract Cauchy problems for weakly continuous operators.

研究分野：実解析学(作用素半群の理論と発展方程式)

キーワード：evolution operator metric-like functional connectedness condition subtangential condition dissipativity condition monotone operator Lipschitz semigroup comparison function

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 加藤の準線形理論の拡張—退化準線形微分方程式系への接近法に向けて—: 与えられた準線形方程式が古典解(連続的微分可能な解)をもつかどうかを調べることは、重要な研究テーマの1つである。退化しない準線形方程式への組織的な取り扱いとして、加藤による準線形理論がある。加藤理論では、線形化問題として現れる非自励な微分方程式系に付随する発展作用素の生成定理が重要な鍵である。一方、退化キルヒホッフ方程式に代表される退化準線形方程式に対する適切性の研究は、Lionsにより、その重要性が説かれている。しかし、この場合には、加藤理論に匹敵するような組織的に理論展開された研究は少ない。さらに、解の初期値に関する連続的依存性に着目して、加藤クラスの発展作用素の概念を拡張し、その生成定理を考察する動きがある。

(2) 時間に依存する単調作用素、劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みの拡張: 時間に依存する単調作用素  $A(t)$  により支配される発展方程式  $u'(t) \in -A(t)u(t)$  に関する加藤による先駆的な研究の後、非線形放物型方程式の混合問題への応用を目指して、時間に依存する汎関数  $\phi'$  の劣微分作用素  $\partial\phi'$  により支配される発展方程式  $u'(t) \in -\partial\phi'(u(t)) + B(t, u(t))$  の初期値問題の強解(殆ど至る所微分可能な解)の存在に関する研究がなされている。これは、加藤により提案された作用素  $A(t)$  の  $t$  に関する条件とは異なる汎関数  $\phi'$  の  $t$  に関する条件のもとで行われ、その条件の汎用性の高さから、多くの非線形放物型微分方程式系の混合問題の可解性へ応用されてきている。

(3) 近似解法による初期値問題の適切性定理の確立—積公式の開発を目指して—: 自励な微分方程式系に対する近似定理として、Laxの同等定理、Chernoffの積公式がある。これらは、離散半群に対するノルムを用いた安定性条件のもとで、Laxの同等定理においては、解作用素を用いた整合性条件、Chernoffの積公式においては、レゾルベント収束を用いた整合性条件が、近似方程式の解の収束を保証するという定理である。解が初期値にリプシッツ連続的に依存する微分方程式系の初期値問題の弱解(微分可能性を期待できない解)を数値解析的に求めるためには、ノルムの代わりに距離に似た汎関数を用いて表現される安定性条件のもとで積公式を研究する必要性があり、リプシッツ作用素半群に対するChernoffタイプの積公式が考察されてきている。

## 2. 研究の目的

(1) 加藤の準線形理論の拡張—退化準線形微分方程式系への接近法に向けて—: 準線形方程式に対する加藤理論は、Featured Review

として紹介され、古典解を求める強力な理論として位置づけられている。退化微分方程式の解の性質を最適に捉えるためには、退化する時刻で解の様子が変化すると考えるのが自然なため、発展作用素の定義域が時間とともに変化する場合は考察する必要があると推測される。退化微分方程式系に対する適切性の問題を、時間とともに変化する定義域をもつ発展作用素のクラスの特徴づけの問題へ翻訳して、その特徴づけを通して加藤理論を退化準線形方程式へ応用できるように拡張することが本研究の目的である。

(2) 時間に依存する単調作用素、劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みの拡張: Neumann境界条件つき多孔質媒体方程式や流れの制約条件つき変分不等式は、劣微分作用素により支配される発展方程式の理論を直接的に適用することが困難なために、方程式の特性を生かした工夫が施されて個別的に考察されている。これらの非線形放物型微分方程式系を、さらには、双曲型方程式系をも組織的に取り扱うことができるように、時間に依存する単調作用素、劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みを拡張することが本研究の目的である。

(3) 近似解法による初期値問題の適切性定理の確立—積公式の開発を目指して—: 解作用素もレゾルベントも利用しない新しいタイプの整合性条件を提案し、その条件のもとで、非自励な微分方程式系に対する近似定理を展開する。とくに自励な場合に限っても、提案する条件は、あらかじめ解作用素が生成されていること、また、初期値問題に対応する定常問題が解をもつことを意味するレゾルベントの存在を前提としない整合性条件であり、そのもとで積公式を考察するという試みは、Laxの同等定理、Chernoffの積公式と本質的に異なり、特色のある点となる。さらに、この過程で導入する手法をリプシッツ作用素半群の積公式へフィードバックさせて、完備な距離空間における作用素半群の積公式を考察することが本研究の目的である。

## 3. 研究の方法

(1) 加藤の準線形理論の拡張—退化準線形微分方程式系への接近法に向けて—: 解の初期値に関する連続的依存性から導出される退化微分方程式系に付随する発展作用素の概念は、代数的性質と強連続性のみを用いて定式化されると考えられる。このような少ない情報量からでも、退化微分方程式系に付随する発展作用素を特徴づける条件として、時間に依存する抽象空間族とそれに備わったノルムにより消散的な作用素の族、Favardクラスに対応する発展作用素に関して不変な空間族の存在が浮上してくると推測する。この新しい着想のもとに、退化微分方程式系の適切性の問題へ挑戦する。

(2) 時間に依存する単調作用素, 劣微分作用素により支配される発展方程式の枠組みの拡張: 時間に依存する劣微分作用素に支配される発展方程式は, ノルムによる消散構造をもち, 解の差を測るものとしてノルムを用いる単調作用素の考えをもとに発展してきている。これに対して, 本研究は, 解の初期値に関する連続的依存性に着目して, ノルムの代わりに距離を用いて, 発展方程式の消散構造を捉えようとするものである。微分作用素のイメージとは結びつきにくい連続性の条件に着目して, 非自励な微分方程式系の適切性定理を展開する。

(3) 近似解法による初期値問題の適切性定理の確立—積公式の開発を目指して—: 可付番順序数をもとに, 超限帰納的に近似解を構成する戦略により, リプシッツ発展作用素の積公式を導出する。本研究の手法は, 代数的構造をもたない距離空間でも機能すると考えられ, Hausdorff 距離を用いる平均曲率流に対する近似解法へ応用可能な作用素半群の積公式を生み出す可能性を秘めており, 変分法に基づく非等方的平均曲率流の近似アルゴリズムの収束への応用を目指す。

#### 4. 研究成果

(1) 連続作用素に支配される非自励な微分方程式に対する適切性定理: 解の初期値に関する連続的依存性に着目し, リプシッツ発展作用素の概念を導入した。連続作用素がリプシッツ発展作用素の生成素であるための条件を, 距離に似た汎関数による消散条件, 接線条件, 定義域の連結性条件により特徴づけ, 非自励な準線形波動方程式の初期値問題の適切性へ応用した。

(2) 弱連続作用素に支配される発展方程式に対する解の存在定理: 発展方程式の適切性の問題から一意性の問題を切り離し, 存在性の問題に焦点を絞った研究である。得られた存在定理をべき乗の非線形項をもつシュレディンガー方程式の初期値問題, 対数項をもつ波動方程式の初期値問題の解の存在性の問題へ応用した。

(3) 退化微分方程式系の適切性定理: 退化微分方程式系の適切性の問題を退化方程式に付随する発展作用素の特徴づけの問題として捉え, よく利用されるレゾルベントの代わりにする作用素族を導入し, それに対する整合性条件, 及び, Favard クラスの概念を組み込んだ安定性条件を提案し考察した。論文を作成中である。

(4) 単調作用素に支配される発展方程式の枠組みの拡張: 微分作用素のイメージと結びつきにくいある種の連続性の条件を解の増大度を測る汎関数を用いて提案し, 自励な方程式系の適切性定理を考察し, 高村, Brezis

により展開された単調作用素, 劣微分作用素の理論の拡張を与えた。可付番順序数を用いた近似解の構成に特色がある。

(5) 関数微分方程式系に対する flow invariance の考察: 発展方程式の枠組みの拡張として, 遅れを考慮した方程式である関数微分方程式を考察する方向がある。遅れを記述する作用素に関する制約付き消散条件のもとで, 関数微分方程式について, ある集合を出発した解がその集合に留まり続けるための十分条件がその集合に対する劣接線条件であることを明らかにした。

(6) 相転移を含む Navier-Stokes 方程式の自由境界問題の適切性: 放物型偏微分方程式の最大正則性原理は, 方程式の主要部に現れる最高階の微分を制御するもので, 非線形放物型方程式, 特に準線形方程式を取り扱う上で最大限の威力を発揮する。本研究では, 相転移を含む Navier-Stokes 方程式の自由境界問題に対して, 線形化方程式系の最大  $L_p$ -正則性に基づき時間局所解の適切性を証明した。相転移問題では, 初期時刻に境界にある流体粒子が常に境界にとどまらないため, それを要請する Lagrange 変換を用いることができず, 半沢変換を用いて自由境界を固定境界に変換する。こうして得られた準線形方程式系の線形化問題の最大  $L_p$  正則性を証明して, 縮小写像の原理により準線形方程式系の時間局所適切性を示した。

(7) 変分法に基づく非等方的平均曲率流の近似アルゴリズムの収束: 非等方的平均曲率で動く超曲面に対して閾値型の近似アルゴリズムを導入し, ハウスドルフ距離の意味での収束を符号付距離関数, 粘性解理論と半群の積公式を用いて証明した。その応用として平面におけるクリスタライン曲率流に対しても同様の近似アルゴリズムを使ってハウスドルフ距離の意味での収束を証明した。

(8) 移流項や外力を伴う平均曲率流に対する近似アルゴリズムの収束: Kimura と Notsu により提案された外力を伴う平均曲率流に対する閾値型の近似アルゴリズムに対してハウスドルフ距離の意味での収束を証明した。さらに, 滑らかでコンパクトな平均曲率流の場合にその収束の速さを評価し, 2 次元円周に対する曲率流の場合にその最良性を示した。論文を作成中である。

#### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 9 件)

① [Toshitaka Matsumoto](#), [Naoki Tanaka](#), Abstract Cauchy problem for weakly continuous operators, J. Math. Anal. Appl., 査読有, 435 (2016) 267-285.  
DOI:10.1016/j.jmaa.2015.10.027

② Yoshikazu Kobayashi, Naoki Tanaka, Yukino Tomizawa, Nonautonomous differential equations and Lipschitz evolution operators in Banach spaces, Hiroshima Math. J., 査読有, 45 (2015) 267-307.

③ Naoki Tanaka, The abstract Cauchy problem for dissipative operators with respect to metric-like functionals, J. Math. Anal. Appl., 査読有, 421 (2015) 539-566.

DOI:10.1016/j.jmaa.2014.07.021

④ Naoki Tanaka, Flow invariance for differential delay equations, Proc. Amer. Math. Soc., 査読有, 143 (2015) 2459-2468.  
DOI:10.1090/S0002-9939-2015-12437-9

⑤ Takayoshi Ogawa, Senjo Shimizu, End-point maximal regularity for the Cauchy problem to a parabolic equation with variable coefficients, Math. Ann., 査読有, published online (2015)

DOI:10.1007/s00208-015-1279-8

⑥ Senjo Shimizu, Shintaro Yagi, On local  $L_p - L_q$  well-posedness of incompressible two-phase flows with phase transitions: the case of non equal densities, Differential Integral Equations, 査読有, 28 (2015) 29-58

⑦ Jan Pruess, Senjo Shimizu, Mathias Wilke, On the qualitative behaviour of incompressible two-phase flows with phase transition: The case of non-equal densities, Comm. P. D. E., 査読有, 39 (2014) 1236-1283.

DOI: 10.1080/03605302.2013.821131

⑧ Katsuyuki Ishii, An approximation scheme for the anisotropic and nonlocal mean curvature flow, NoDEA Nonlinear Differential Equations and Applications, 査読有, 21 (2014) 219-252.

DOI:10.1007/s00030-013-0244-z

[学会発表] (計 14 件)

① Senjo Shimizu, Local existence of compressible two-phase flows with phase transitions, Workshop on the Navier-Stokes Equations in honor of Prof. Reinhard Farwig's 60th birthday, 2016 年 4 月 22 日, Darmstadt University (Germany)

② 松本敏隆, サイズ構造モデルへの準線形理論的接近法, 日本数学会年会, 2016 年 3 月 19 日, 筑波大学 (茨城県つくば市)

③ 田中直樹, Mutational equation に対する適切性定理について, 第 41 回発展方程式研究会, 2015 年 12 月 26 日, 日本女子大学目白キャンパス (東京都文京区)

④ 佐野弘貴, Well-posedness for semilinear functional differential equations, 第 40 回発展方程式研究会, 2014 年 12 月 25 日, 日本女子大学目白キャンパス (東京都文京区)

⑤ 石井克幸, Rate of convergence of an algorithm for curvature-dependent motions of hypersurfaces, 抽象発展方程式理論から見た偏微分方程式に関する評価方法の再考, 2014 年 10 月 24 日, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市)

⑥ 田中直樹, 弱連続作用素に対する抽象的 Cauchy 問題について, 日本数学会秋季総合分科会, 2014 年 9 月 28 日, 広島大学東広島キャンパス (広島県東広島市)

⑦ 田中直樹, The abstract Cauchy problem for dissipative operators with respect to metric-like functionals, 第 39 回発展方程式研究会, 2013 年 12 月 22 日, 日本女子大学目白キャンパス (東京都文京区)

⑧ 石井克幸, Convergence of an approximation scheme for mean curvature flow, One-day workshop on geometric variational problems, 2013 年 11 月 30 日, 北海道大学理学研究科 (北海道札幌市)

[その他]

ホームページ等

<https://tdb.shizuoka.ac.jp/RDB/public/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田中 直樹 (TANAKA, Naoki)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号: 00207119

### (2) 研究分担者

清水 扇丈 (SHIMIZU, Senjo)

京都大学・人間・環境学研究科・教授

研究者番号: 50273165

石井 克幸 (ISHII, Katsuyuki)

神戸大学・海事科学研究科・教授

研究者番号: 40232227

### (3) 連携研究者

松本 敏隆 (MATSUMOTO, Toshitaka)

静岡大学・理学部・教授

研究者番号: 20229561