

平成 28 年 5 月 31 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400137

研究課題名(和文) 確率制御におけるリスク回避的極限とロバストモデルの研究

研究課題名(英文) Study of risk-averse limits in stochastic control and robust models

研究代表者

貝瀬 秀裕 (Kaise, Hidehiro)

大阪大学・基礎工学研究科・准教授

研究者番号：60377778

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：系における外乱等の不確かさに関して頑健性(ロバスト性)を持つモデルが理論・応用の両面で注目を集めている。本研究では数理ファイナンスの問題やそれを一般化した確率制御問題におけるリスク回避的極限を考え、ロバスト性を持つモデルの導出や動的計画的な手法を発展させることに成功した。また、ロバストモデルに関連する経路依存型の系に対する最適制御問題の研究を行った。

研究成果の概要(英文)：Robust models to uncertainty such as noises in systems attract a lot of attentions in theories and applications. In this project, we considered risk-averse limits of problems in mathematical finance and their generalizations of stochastic controls. We succeeded in deriving robust models and developing dynamic programming methods. We also studied optimal control problems for path-dependent systems related to robust models.

研究分野：確率制御

キーワード：確率制御 確率論 数理ファイナンス 動的計画偏微分方程式 粘性解

### 1. 研究開始当初の背景

制御理論では制御と呼ばれる入力パラメータと状態と呼ばれる出力パラメータを持つ力学系(制御力学系)を考え、制御力学系は微分方程式を用いて記述される。制御力学系が外乱などの不確かさの影響を受ける場合、それらはしばしば確率過程を用いて定式化される。外乱を確率過程を用いてモデル化するにはあらかじめその統計的性質を知る必要があるが、実際の外乱と想定した外乱の性質との間に乖離がある際は、設計した制御器が十分なパフォーマンスを持たないことが起こる場合があり、モデル化誤差に対して頑健性(ロバスト性)を有する理論が重要と考えられている。

ロバストモデルの研究の端緒は、まず工学における Linear Quadratic Gaussian (LQG) 問題を典型とする確率制御におけるロバスト性の欠如の指摘に見ることができ、その問題を解決すべく 1980 年代初頭に提唱された H 無限大制御が大きな成功を収めた。1980 年代後半に確率制御のリスク鋭感的確率制御と H 無限大制御の関係が形式的な議論により指摘され、その関係を数学的に厳密化する研究が進んだ。これにより確率制御におけるある種のロバスト性と H 無限大制御におけるロバスト性の関係が明らかになりつつある。

一方で、近年、数理ファイナンスにおいてモデル化誤差に対してロバストな理論の研究が盛んである。その代表例として、確率微分方程式のドリフト項や拡散係数(ボラティリティ)のモデル化誤差を見込んだ  $g$  期待値や  $G$  期待値などの非線形期待値に基づく研究が挙げられ、これらの研究は国内外の多くの研究者により爆発的に進展している。また、この他にも経済学においてもロバスト制御を理論の中心に据えた研究も見受けられるようになりロバストモデルの重要性は高まりつつある。

上記の状況に見られるように、モデル化誤差に対してロバスト性を備えた理論の構築、またそれを解析するための数学的理論の研究は国内外の多くの研究者の関心を集めている。

### 2. 研究の目的

リスク鋭感的確率制御においてある種の特異極限を取ることで H 無限大制御がある一定の条件の下で導出できることが知られている。より詳しくは、乗法的汎関数を評価関数に持つリスク鋭感的確率制御において、微小拡散を表すパラメータを組み込み、Wentzell-Freidlin 型大偏差原理の効果を用いることで、微分ゲームとして定式化した H 無限大制御を導くことができる。

一方、数理ファイナンスにおける冪効用関数に対する最適投資(消費)問題はリスク鋭感的確率制御問題として捉えることができることが知られている。この最適投資(消費)問題をリスク鋭感的確率制御と見直した場合、微小拡散に関する極限は HARA パラメータに関するリスク回避的極限に対応する。したがって、一般のリスク鋭感的確率制御と H 無限大制御の関係により、リスク回避的極限を通じて数理ファイナンスにおける新たなロバストモデルを導出できることが期待される。

本研究では数理ファイナンスの問題やそれを一般化した確率制御問題のリスク回避的極限を通じてロバスト性を備えたモデルを導き、そのために必要な数学的基盤研究を行うことを目的とする。またロバストモデルにも適用の可能性のある確率制御や決定論的制御における数学的問題の研究を行う。

### 3. 研究の方法

数理ファイナンスにおける冪効用関数に対する最適投資(消費)問題において、リスク回避的極限を用いることでロバスト性を有するモデルを導出する。詳しくは、最適期待効用関数が満たす動的計画偏微分方程式を考え、確率論や解析学的手法を発展させることにより、ロバストモデルを動的計画偏微分方程式を通じて研究する。数理ファイナンスにおけるロバストモデルや関連するロバストモデルを粘性解理論などを駆使して研究する。また、ロバストモデルにおける値関数や最適制御の計算手法の基礎を築くために、確率制御や決定論的制御における動的計画方程式に対して冪等的手法によりアプローチする。

### 4. 研究成果

(1) ファクターモデルと呼ばれる市場モデルにおいて、無限時間区間における冪効用関数に対する最適投資消費問題のリスク回避的極限を考えた。最大期待効用として定義される値関数は、ある一定の条件の下で 2 階 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 偏微分方程式の古典解として特徴づけられることが知られている。ファクターを記述する確率微分方程式において微小拡散パラメータを組み込むことでファクターモデルの不確かさが消える状況を作り出し、同時に投資家のリスク回避度を上げる状況を想定した。リスク回避度と微小拡散パラメータの間にあるスケールアップの関係を置くことで、この問題におけるリスク回避的かつ微小拡散極限の結果として非自明な決定論的微分ゲームの導出に成功した。詳しくは、この極限操作により、2 階 HJB 偏微分方程式の解が微分ゲームにおける 1 階 Isaacs 偏微分方程式の粘性解に収束することを示した。無限時間最適投資消費問題におけるロバストモデルの研究はあま

り見受けられず、リスク回避的極限を取ることで無限時間区間微分ゲームによる新たなロバストモデルを提唱できた。

(2) ファクターモデルにおいて、ファクター自身が観測できない問題は部分可観測問題と呼ばれている。部分可観測下における冪効用最適投資問題はリスク鋭感的確率制御における修正 Zakai 方程式に対する確率制御に帰着する。一方、ある条件のもとで部分可観測リスク鋭感的確率制御と部分可観測 H 無限大制御はある種の特異極限を通して関係があることが知られている。この関係に着目し、部分可観測下での冪効用最適化問題のリスク回避的極限として得られることが期待できる部分可観測 H 無限大制御の研究を行った。具体的には、部分可観測下の H 無限大制御の枠組みで対数効用関数の最適投資問題を定式化し、修正 Zakai 方程式の微小拡散極限として形式的に得られる 1 階非線形偏微分方程式を用いて、株価の情報だけを利用する予測器とそれによる推定値を用いた最適戦略を構成した。H 無限大制御の枠組みでの部分可観測最適投資問題の研究は知る限り皆無であり、本研究ではその可能性を明らかにした。

(3) 数理ファイナンスにおいて経路依存型デリバティブの期待値やヘッジ戦略の計算は基本的かつ重要な問題であり、経路依存型ペイオフや経路依存型の系は非線形期待値や後向き確率微分方程式との関連から近年活発に研究されている。Wentzell-Freidlin 型大偏差原理が成り立つような制御確率力学系において経路依存型ペイオフを考えて微小拡散極限（数理ファイナンスのある問題においてはリスク回避的極限）を取ると、経路依存型決定論的系における制御主体と不確かさ間の零和ゲームを導出することができる。ここでの研究では、ロバストモデルの解析を念頭において経路依存型決定論的系において経路依存型ペイオフを持つ微分ゲームの一般論を構築した。ロバストモデルでは不確かさにより引き起こされる最悪のシナリオの最適化に関心があるため、ペイオフに対する最小値と最大値を取る順番が本質的であり、inf と sup の順序を固定した inf-sup 型の値関数を考える必要がある。経路依存型系に対しては通常動的計画法は適用できないため経路依存動的計画法を用いることで、inf-sup 型の値関数を経路依存型 Isaacs 偏微分方程式の粘性解に関連付けることに成功した。本研究成果は経路依存型ロバストモデルに対して数学的基礎を与える。また、直接計算が困難とされる経路依存型動的加重サンプリング法の最適サンプリングスキームに対して、偏微分方程式を通じた構成法に道を開く可能性がある。

(4) HJB 偏微分方程式は値関数や最適制御（戦略）の計算をする上で基本的であるが、一般

的に明示的な解を持つことは稀である。したがって解を求めるには数値的手法を用いることになるが、しばしば使われるような手法、例えば有限差分法は、計算量が次元に関して指数関数的に増大してしまうといういわゆる「次元の呪い」の影響を受ける。決定論的 HJB 方程式に関しては、動的計画法に関連した非線形半群の max-plus 代数の下での線形性に着目した max-plus 展開による次元の呪いに依らない数値手法が知られている。本研究では確率制御における HJB 偏微分方程式に対して、冪等代数的手法による次元の呪いによらない数値解析の基礎研究を行った。確率制御における非線形半群は max-plus 代数に関して線形性を持たないため、決定論的制御における max-plus 展開が直ちに使用できない。そこで、max-plus 代数における分配律を一般化することにより、時間離散近似した値関数が時間を経過させてもある一定の関数系で展開できることを証明した。特別なケースとして、時間離散近似した値関数が各時刻において 2 次関数で展開できることを示した。このことにより、値関数の展開係数を追跡することで、次元の呪いによらない数値スキームが得られる。一方、展開する関数系の濃度が時間とともに指数関数的に増大するため、展開に貢献しない関数を適切に排除する理論の構築が今後必要になってくる。

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 3 件)

H. Kaise and W.M. McEneaney, Idempotent expansions for continuous-time stochastic control, "SIAM Journal on Control and Optimization", 査読有り, vol.54, 2016, pp.73-98

<https://www.siam.org/journals/sicon.php>

H. Kaise, Path-dependent differential games of inf-sup type and Isaacs partial differential equations, "IEEE 54<sup>th</sup> Conference on Decision and Control", 査読有り, vol.1, 2015, pp.1972-1977

<http://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp>

H. Kaise,  $H^\infty$ -control model for a partially observed optimal investment problem, "Proceedings of 21<sup>st</sup> International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems", 査読有り, vol.1, 2014, pp.158-165

<http://fwn06.housing.rug.nl/mtns2014/>

〔学会発表〕(計7件)

H.Kaise, Path-dependent differential games of inf-sup type and dynamic programming equations, “Seminar on problems under model uncertainty and related topics”, 2016年2月25日, 大阪大学(大阪府豊中市)

H.Kaise, Path-dependent differential games of inf-sup type and Isaacs partial differential equations, “54<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control”, 2015年12月15日, 大阪府立国際会議場(大阪府大阪市)

H. Kaise, Convergence of discrete-time deterministic games to path-dependent Isaacs partial differential equations, 「第5回数理ファイナンス合宿型セミナー」, 2015年11月16日, クロスウェーブ府中(東京都府中市)

H. Kaise, Dynamic programming for path-dependent deterministic control and idempotent expansion methods, “SIAM Conference on Control and its Applications”, 2015年7月8日, Paris(フランス)

H. Kaise,  $H^\infty$ -control model for a partially observed optimal investment problem, “21<sup>st</sup> International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems”, 2014年7月7日, Groningen(オランダ)

貝瀬 秀裕, Dynamic importance sampling for path-dependent events: path-dependent dynamic programming method, 「金融リスクの計測・管理・制御と資本に纏わる諸問題」, 2014年3月13日, 大阪大学(大阪府豊中市)

H.Kaise, Risk-averse limit in finance applications, “SIAM Conference on Control and its Applications”, 2013年7月10日, San Diego(米国)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：

発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

貝瀬 秀裕(KAISE, Hidehiro)  
大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授  
研究者番号：60377778