

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 24 日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400142

研究課題名(和文) モジュライ空間の種々の計量を用いた研究

研究課題名(英文) Research of Moduli spaces based on various metrics

研究代表者

小櫃 邦夫 (OBITSU, KUNIO)

鹿児島大学・理工学域理学系・准教授

研究者番号：00325763

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：点付きリーマン面のモジュライ空間上のWeil-Petersson計量とTakhtajan-Zograf計量の境界近傍における漸近展開公式を求めることを主眼として研究を進めてきた。Takhtajan-Zograf計量の以前得た漸近展開の上からの評価を、最良と思われる評価に改良した。2015年頃、Mazzeo氏、Swoboda氏、Melrose氏、Zhu氏が、b-解析の手法を用いて、研究代表者の以前の結果の別証明と部分的改良を発表した。彼らとも討論を行い、代表者は彼らの手法を取り入れながら、さらなる改良を目指して研究を進めている。

研究成果の概要(英文)：Main topic of this research is to find out the asymptotic expansion formula for the Weil-Petersson and the Takhtajan-Zograf metrics near the boundary of Moduli spaces of punctured Riemann surfaces. I have improved the former upper bound estimates of the asymptotic behavior of the Takhtajan-Zograf metric. Around 2015, Mazzeo, Swoboda, Melrose, and Zhu obtained the new proofs and some improvements of my previous estimates of the asymptotics of the Weil-Petersson and the Takhtajan-Zograf metrics. I discussed their new approaches with them, and now am working in unifying their and my techniques to get the complete expansion formulas.

研究分野：複素解析学

キーワード：リーマン面 モジュライ ケーラー計量 漸近展開

様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

有限型点付きリーマン面のタイヒミュラー空間上のケーラー計量を調べることによって、タイヒミュラー空間とモジュライ空間、およびそれらの計量を用いた完備化空間の幾何構造は、従来より重要な研究対象である。

2. 研究の目的

点付きリーマン面のモジュライ空間の種々の距離を用いた完備化空間の性質を明らかにすることが、目的である。

3. 研究の方法

特に、Weil-Petersson 計量、Takhtajan-Zograf 計量を用いてそれらのタイヒミュラー空間の境界近傍における漸近展開を出来るだけ詳しく解析することで、タイヒミュラー空間、およびモジュライ空間のコンパクト化空間の幾何学の性質を解き明かそうとする方法を用いた。

4. 研究成果

(1)平成 25 年度 (2013 年度)

2008 年の W.K.To 氏、L.Weng 氏との共同研究で得た Takhtajan-Zograf 計量のタイヒミュラー空間の境界近傍における漸近挙動の上からの評価の改良を試みた。以前の照明は、退化する点付きリーマン面上で定義された点に対応する Eisenstein 級数を、退化する単純閉測地線の近傍において、試験 Eisenstein 関数と比較することにより、退化する Eisenstein 級数の上からの評価と下からの評価を与えていた。そこで、さらに精密な評価を得るために、まず試験 Eisenstein 関数と Eisenstein 級数の商関数が満たす微分方程式を導いた。2 階の非線形微分方程式でかなり複雑な形であるが、その微分方程式の解が最大値原理を満たすことを証明することができた。この証明について、W.K.To 氏、L.Weng 氏らと九州大学において会い、議論を重ね、この手法の有用性が徐々に明らかになった。8 月ヘルシンキ大学で開かれた第 22 回ネバンリンナ・コロキウムに出席し、海外の最新のリーマン面に関する研究成果を学ぶと共に、代表者の研究について海外の研究者と議論をする機会があり、有益であった。11 月は京都大学数理解析研究所でさまざまなモジュライ空間の幾何学に関する研究集会に出席し、双曲幾何学の新しいタイプの McShane 恒等式の証明を理解することが出来、双曲幾何的に Takhtajan-Zograf 計量を調べる手法を考察する上で大いに参考になった。

(2)平成 26 年度 (2014 年度)

Eisenstein 関数と Eisenstein 級数の商関数が満たす微分方程式を引き続き検討し、退化する単純閉測地線の近傍における Eisenstein 級数の上からの評価の改良の証明を書き上げた。W.K.To 氏、L.Weng 氏とも

証明を検証した。8 月ソウルにおける国際数学会議に出席した。代表者の研究分野に関する多くの優れた講演を聞き、また分野は少し離れるが、解析数論や微分幾何学における画期的研究成果について、初めて学ぶ機会を得た。リーマン面の被覆に関するエーレンプライス予想の解決に関する Markovic 氏と Kahn 氏の講演は、代表者の研究テーマと近い研究テーマで、その証明の優れた発想に驚嘆するとともに、彼らの研究手法を、代表者の Weil-Petersson 計量の幾何学の研究に取り込むことを検討した。10 月 Yale 大学で行われた第 6 回 Ahlfors-Bers コロキウムに出席した。日本ではあまり研究されていない研究テーマを多く知り、特にタイヒミュラー円板に関する Antonakoudis 氏の成果は、古典的な問題に大きく進展をもたらすもので、非常に刺激を受け、代表者が今まであまり関心をもたなかったタイヒミュラー計量について、集中的に近年の研究成果を調べて習得した。(3)平成 27 年度 (2015 年度)

7 月末に Cambridge 大学 Newton 研究所で開かれた研究集会「Metric and Analytic aspects of Moduli spaces」に出席した。この集会では、Melrose 氏、Mazzeo 氏、Zhu 氏が、以前代表者が Wolpert 氏と共同で証明したリーマン面のタイヒミュラー空間の境界近傍における Weil-Petersson 計量の漸近展開の第 2 次項を決定した結果や、代表者と To 氏、Weng 氏の Takhtajan-Zograf 計量の漸近挙動の評価を、さらに推し進めた最新の成果について、講演した。彼らの手法は、代表者が従来用いてきた手法と異なり、b-解析という特異空間上の擬微分作用素の解を精密に解析する手法の見事な応用であることを知った。彼らと議論をする時間をもつことが出来、極めて貴重な機会となった。Zhu 氏とは Takhtajan-Zograf 計量の漸近展開についての代表者の予想とその根拠について、議論することができた。8 月後半、東京大学で開かれた研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」に出席し、国内の研究者によるリーマン面の最新の研究成果を知ることが出来た。特に尾高氏のリーマン面のモジュライ空間の新しいコンパクト化空間の構成は、Gromov の崩壊理論をモデルにしたもので、新しい視点からのアプローチが代表者にとっては非常に新鮮なもので、今後研究対象として考えていきたいと思っている。

(4)平成 28 年度 (2016 年度)

4 月に東京大学の複素解析幾何セミナーで、代表者の最近の成果を含め、Melrose 氏、Mazzeo 氏らによる、Weil-Petersson 計量と Takhtajan-zograf 計量のタイヒミュラー空間の境界近傍における漸近展開の最新成果について、講演する機会を得た。2 つの計量の境界成分における幾何学の違いがより鮮明になることを、セミナー参加者達と確

認し、今後の応用への課題、問題点について検討する非常に貴重な機会となった。6月京都大学数理解析研究所で開かれた研究集会「離散群と双曲空間のトポロジーと解析」に出席した。国内の研究者の最新の研究成果を知るよい機会になった。特に、McShane 恒等式の上田氏による新証明、中西氏によるコンパクトリーマン面のタイヒミュラー空間の新しい座標の導入の研究は、代表者の興味に近く、非常に参考になった。8月中旬シンガポール国立大学で開かれた研究集会「Moduli spaces of geometric structures」に出席した。主に双曲幾何学、タイヒミュラー空間に関する最新の成果について学ぶ有益な機会となった。また、長年共同研究を進めているシンガポール国立大学の W.K. To 氏と Takhtajan-Zograf 計量の漸近挙動について、数年前に発見した Eisenstein 級数と試験 Eisenstein 関数の商関数をより精密に解析することについての検討を引き続き行った。また、Melrose 氏 Mazzeo 氏らの b -解析を用いた Weil-Petersson 計量、Takhtajan-Zograf 計量の漸近展開に関する最新結果の証明を、To 氏と詳しく検討することが出来た。代表者らの成果と Melrose 氏 Zhu 氏のプレプリントにおける主張は、若干整合性に疑問点が2、3あり、この点については、今後も引き続き、Melrose 氏らの証明の詳細を検討し、今後さらに必要な修正を行いながら代表者と共同研究者の研究を推し進めていきたい、と考えている。1月東京大学で開かれた研究集会「2次微分の幾何とその周辺」において、タイヒミュラー距離の微分可能性についての長年の問題を解決した M. rees 氏の論文を、島根大学の中西氏と分担し紹介する機会があった。代表者は学生時代よりタイヒミュラー空間上のケーラー計量を研究対象としてきて、ケーラー計量はないタイヒミュラー空間にはあまり関心を持たないでいた。古くからあるタイヒミュラー円板などの研究が近年急速に進展しつつあることを実感し、今後は代表者もタイヒミュラー距離を研究対象に加えて、Weil-Petersson 計量、Takhtajan-Zograf 計量によるタイヒミュラー空間の幾何解析の研究とともに考察していきたい、と考えている。

研究目的の一つに挙げていた課題は、点付きリーマン面のタイヒミュラー空間の Penner の座標を用いて、Takhtajan-Zograf 形式を記述することであった。この課題に取り組む第一段階として、研究代表者は、Penner の座標の第1変分公式と第2変分公式を導くことができた。こそ結果については、現在論文執筆中である。その結果について概略を述べる。まず、Penner の座標は、2つのカスプを結ぶ理想的測地線がカスプのホロサイクルで切られた残りの有限な線

分の双曲長さ1であることに注意する。2この理想測地線を上半平面上にリフトしたものは、2つのカスプを0と無限遠点に正規化したとき、虚軸上に乗っている線分になる。この線分の長さの双曲計量の変形に沿った第1変分は、擬等角写像の変分公式を用いて計算することが出来た。Penner 座標の外微分は、タイヒミュラー空間の余接ベクトルであるが、これは基点となるリーマン面上の正則2次微分と同一視される。その正則2次微分は、0と無限遠点でそれぞれ1位の極を持つコタンジェント関数で表されるポアンカレ級数となることを示した。次に、第2変分公式を計算した。これは第1変分公式を、さらに擬等角写像の変分公式を用いて計算することによって得られた。この計算は一段と困難で、Wolpert 氏がかつて閉測地線の長さの第2変分公式を証明した時の手法を応用することで実現出来た。この第2変分公式は、重要な応用がある。Penner の座標がタイヒミュラー空間上の関数とみなしたとき、下に凸な関数であることを直接計算によって示すことが出来た。その凸性は、Penner 氏の座標によってタイヒミュラー空間のセル分割を実現する際の、最も重要な性質の一つであるが、その解析的な直接証明を初めて与えた結果であり、有意義な別証明になっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1件)

Kunio Obitsu

数理解析研究所講究録、査読無、1862, 2013, 30-41, Recent progress on Takhtajan-Zograf and Weil-Petersson metrics

[学会発表] (計 3件)

小櫃邦夫、研究集会「2次微分の幾何とその周辺」、東京大学数理解析研究科(東京都目黒区)、2017年1月12日、タイヒミュラー距離のなめらかさについて2

小櫃邦夫、複素解析幾何セミナー、東京大学大学院数理解析研究科(東京都目黒区)、2016年4月18日、

Weil-Petersson 計量の漸近展開についての最近の進展

Kunio Obitsu、研究集会「Moduli space, conformal field theory and Matrix models」、沖縄科学技術大学院大学(沖縄県恩納村)2015年3月16日、Several aspects of the Takhtajan-Zograf metric

[図書] (計 0件)

[産業財産権]

出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小櫃 邦夫 (OBITSU, Kunio)
鹿児島大学・理工学域理学系・准教授
研究者番号：00325763

(2) 研究分担者

愛甲 正 (AIKOU, Tadashi)
鹿児島大学・理工学域理学系・教授
研究者番号：00192831

松村 慎一 (MATSUMURA, shinichi)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90647041

(3) 連携研究者

なし ()

研究者番号：

(4) 研究協力者

なし ()