

令和元年6月5日現在

機関番号：32642

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2018

課題番号：25400146

研究課題名(和文) ソボレフ不等式の離散化と工学への応用

研究課題名(英文) Discretization of Sobolev inequalities and its engineering applications

研究代表者

永井 敦 (Nagai, Atsushi)

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：90304039

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：基礎工学の諸分野に登場する微分方程式および差分方程式の境界値問題のグリーン関数またはグリーン行列を求めた。次にグリーン関数やグリーン行列がヒルベルト空間を適切に設定すると再生核であることを示し、再生等式からソボレフ不等式および離散ソボレフ不等式を導出した。また(離散)ソボレフ不等式の等号成立条件、言い換えれば最良定数と等号を達成する最良関数をグリーン関数やグリーン行列を詳細に調べることによって求めた。特に工学上重要な問題として、C60 フラーレンや各種グラフ上の離散ソボレフ不等式を導出して、その最良定数と最良関数を厳密に求めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

工学上重要な微分方程式や差分方程式の境界値問題に対してグリーン関数やグリーン行列を厳密に求めることは、工学の問題の数学的基礎付けを与えることに相当する。また対応するソボレフ不等式や離散ソボレフ不等式はC60フルラーレンを例にとると、C60を構成する各分子の変位の最大値をC60のエネルギーの定数倍で評価する不等式である。また最良定数はC60の硬さを表す1つの指標であり、工学上の意味は大きいと確信している。

研究成果の概要(英文)：We first formulated boundary value problems for differential or difference equations which appear in the field of engineering and found their Green functions or Green matrices. The Green functions or matrices are reproducing kernels for a suitable Hilbert space. From reproducing relations, Sobolev inequalities and their discrete version are derived. The equality conditions for the inequalities are found, that is to say, the best constant and the best function which attains = in the inequality are found by investigating the Green functions or matrices. In particular, discrete Sobolev inequalities for C60 fullerene and fundamental graphs are derived, together with the best constants and the best functions.

研究分野：微分方程式と差分方程式

キーワード：グリーン関数 ソボレフ不等式 離散化 最良定数 C60 グラフ

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 2000年頃から大阪大学大学院基礎工学研究科亀高惟倫教授と基礎工学に登場する4階線形常微分方程式の各種境界値問題(棒のたわみ問題)を扱った。この問題はオイラーやベルヌーイに端を発する古典的問題であるが、その計算の煩雑さゆえに多くの未解決問題を含む。我々は境界値問題のグリーン関数を求め、その正值性、異なる境界条件下でのグリーン関数の大小関係(階層構造)、区間長に関する単調増加性または単調減少性などについての詳細な性質を調べてきた。

(2) 2004年頃から本研究課題の研究開始の2013年までの約10年間、これまで蓄積してきたグリーン関数がヒルベルト空間を適切に設定すると再生核であることを解明した。また再生等式から、コーシー・シュワルツの不等式やヘルダーの不等式を用いてソボレフ不等式を導出した。そしてグリーン関数をベースにした各種ソボレフ不等式の最良定数と最良関数の計算法を確立した。

(3) 2007年頃からは、微分方程式にとどまらず、同様の手法を工学に登場する差分方程式の境界値問題に適用して、離散グリーン関数(グリーン行列)を求めて、離散グリーン関数の応用として、ソボレフ不等式の離散化および不等式の最良定数と最良関数の計算を開始した。

2. 研究の目的

(1) 本研究の主目的は20世紀の微分方程式論の中核を成すソボレフ不等式の離散化を行い、離散ソボレフ不等式の最良定数・最良関数を具体的に求めることによって、工学における諸問題の数学的基礎付けを与えることである。

(2) 離散系と並行して、基礎工学に登場する常微分方程式や偏微分方程式の各種境界値問題についても、引き続きグリーン関数や一般化グリーン関数を求め、ソボレフ不等式の最良定数と最良関数を求める。

(3) 離散ソボレフ不等式はグラフ上の不等式と見なすこともできる。得られた結果のグラフ理論をはじめ、材料力学、電気回路、化学、など工学の諸問題への応用を試みる。

3. 研究の方法

(1) 扱った問題

グリーン関数を用いたソボレフ不等式の導出と最良評価の研究において、離散と連続の観点から主に以下の問題を扱った。

各種グラフ上の離散ソボレフ不等式の最良定数

数理工学上重要な各種グラフ上の離散ラプラシアンを定式化して、そのグリーン行列や一般グリーン行列(ベンローズ=ムーア一般化逆行列)を求めた。次にその応用として離散ソボレフ不等式を導出し、その最良定数および最良関数、つまり等号成立条件を厳密に求めた。扱ったグラフとしてはプラトングラフ(正4, 6, 8, 12, 20面体)、切頂4, 6, 8, 12, 20面体、完全グラフ $K(n)$ 、重み付き完全グラフ、完全2部グラフ $K(m, n)$ などである。特に切頂20面体はC60フラレンであり、化学の問題に対して数学的基盤を与えることが期待されている。

連続系におけるソボレフ不等式の最良定数

離散系のみならず連続系、特に常微分方程式においても多くの未解決問題を残しており、これらについても1つ1つ丁寧にグリーン関数やソボレフ不等式の最良定数を計算する必要がある。特に $2M$ 階常微分作用素 $(-1)^M(d/dx)^{2M}$ の各種境界値問題や電気回路に対応するソボレフ型不等式を扱った。

(2) 研究体制について

本研究は大阪大学基礎工学部亀高惟倫名誉教授の他、山岸弘幸東京産業技術高等専門学校准教授、武村一雄日本大学准教授、渡邊宏太郎防衛大学校教授らとも研究打ち合わせを行いながら研究を進めた。年に数回、東京または京都に集まって研究打ち合わせを行なった。

また本研究課題の研究期間において、研究代表者は2013年から2016年度までは日本大学生産工学部教養・基礎科学系を研究拠点としていたが、2017年度以降は研究拠点を津田塾大学学芸学部情報科学科に移して現在に至っている。

(3) 研究環境について

本研究は古典的かつ基礎的な問題を扱うが、その一方で大量の計算を必要とする。主要な数式処理や数値計算はPC(Epson MR8000-M および MacBook Retina 12inch 2017)に Mathematica 10 や Python3 などをインストールして行った。

4. 研究成果

以下前節(1)で挙げた2項目, について得られた研究成果をリストアップする。

(1) 各種グラフ上の離散ソボレフ不等式の最良定数

プラトングラフ(正4, 6, 8, 12, 20面体)について, 離散ラプラシアン A を定式化して, 対応する一般化グリーン行列(ペンローズ=ムーア一般化逆行列) $G=A^{\#}$, グリーン行列 $G(a)=(A+aI)^{-1}$, 離散熱核 $H(t)=\exp(-tA)$ に対応する3種の離散ソボレフ不等式を導出した。また離散ソボレフ不等式の最良定数を A の固有値を用いて厳密に求めた(論文)。

論文 に続いて, 切頂4, 6, 8多面体についても頂点に適切にナンバリングすることによって平面グラフで表して, 離散ラプラシアンを定式化し, その擬グリーン行列とグリーン行列を求め, その再生核構造を調べて最良定数と最良関数(最良ベクトル)を求めた(論文)。

論文 の最終段階として, 最も頂点数の多く, 工学上も重要な切頂20面体つまりC60バッキーボールフラレンについて, 頂点に適切にナンバリングすることによって平面グラフとして表し, 対応する離散ラプラシアンとその特性方程式そして固有値分布を計算した。

また擬グリーン行列とグリーン行列の再生核構造や離散ソボレフ不等式の最良定数計算にも成功した。本研究結果である離散ソボレフ不等式の最良定数はC60の硬さ(たわみにくさ)を表しており, 化学における数学的基盤を与えることが期待される(論文)。

テープリックグラフと呼ばれるクラスのグラフに重みのついた重み付きテープリックグラフにおいて, 離散ラプラシアンとその(擬)グリーン行列を定式化し, 2種類の離散ソボレフ不等式を導出, その最良定数と最良関数を計算した(論文)。

超離散化した(独立変数のみならず従属変数も離散化した)KdV方程式の負のソリトン解と呼ばれる新しいタイプのソリトン解について研究した。また負のソリトンが現れる場合において, 従属変数および独立変数の取り方を変えると超離散戸田分子方程式を満たすことを示した(論文)。

重み付き完全グラフ上の離散ラプラシアンおよびそのグリーン行列や擬グリーン行列を定式化して, 対応する離散ソボレフ不等式の最良定数を離散ラプラシアンの固有多項式の展開係数の式として与えた。さらに求めた最良定数の間に興味深い階層構造が成り立つことを発見した(論文)。

(1) 連続系におけるソボレフ不等式の最良定数

電気回路における有名なトムソンケーブルを連続化した微分方程式モデルを考察した。グリーン関数を修正ベッセル関数によって表し, 対応するソボレフ型不等式の最良定数を求めた。本研究で得られたソボレフ型不等式の物理的意味は出力電圧の最大値を入力電圧の L^2 ノルム(エネルギーノルム)の定数倍で評価するものであり, 工学的にも興味深い結果である(論文)。

$2M$ 階常微分作用素 $(-1)^M(d/dx)^{2M}$ に対する各種境界値問題と対応するソボレフ不等式を2004年以降研究してきたが, その最終段階として最も扱いが困難な両端自由端境界値問題を扱った。この問題は対応する固有値問題が固有値0(対応する固有空間は M 次元)をもつため, 狭い意味でのグリーン関数は存在しない。本論文では可解条件とよばれる直交性条件を課することによって対称直交化法(symmetric orthogonalization method)と呼ばれる手法を用いて一般化グリーン関数を求めた。グリーン関数の応用として, 対応するソボレフ不等式を導出し, その最良定数と最良関数を計算した。証明において超幾何級数に関するホイップルの定理が本質的な役割を果たす(論文)。

常微分作用素に対応するソボレフ不等式に関するこれまでの成果を多変数, つまり偏微分作用素の場合に拡張した。特に円板内部および3次元球内部の重調和作用素 Δ^2 (Δ は2次元または3次元ラプラシアン)のグリーン関数の積分表示を求めた。グリーン関数がヒルベルト空間を適切に定めると再生核となることを示した。再生等式の証明においてガウス-グリーンンの定理が重要な役割を果たす。さらに対応するソボレフ不等式の最良定数を与えた(論文)。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計9件)

Hiroyuki Yamagishi, Yoshinori Kametaka, Kohtaro Watanabe, Atsushi Nagai and Kazuo Takemura,
The Best Constant of Three Kinds of Discrete Sobolev Inequalities on Regular Polyhedron,
Tokyo Journal of Mathematics, 36 (2013) pp. 253--268.

亀高 惟倫, 山岸 弘幸, 永井 敦, 渡辺 宏太郎, 武村 一雄,
切頂正4, 6, 8面体上の離散ソボレフ不等式の最良定数,
日本応用数理学会論文誌 Vol. 25 No.3 (2015) pp. 135--150.

Yoshinori Kametaka, Atsushi Nagai, Hiroyuki Yamagishi, Kazuo Takemura and Kohtaro

Watanabe,
The Best Constant of Discrete Sobolev Inequality on the C60 Fullerene Buchyball,
Journal of the Physical Society of Japan 84, 074004 (2015).

Kazuo Takemura, Atsushi Nagai and Yoshinori Kametaka,
Two types of discrete Sobolev inequalities on a weighted Toeplitz graph,
Linear Algebra and its Applications 506 (2016) pp. 344--355.

C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo and A. Nagai,
A direct approach to the ultradiscrete KdV equation with negative and non-integer site
values,
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 48 (2015) 295201 (15pp.).

Kazuo Takemura, Yoshinori Kametaka and Atsushi Nagai,
A Hierarchical Structure for the Sharp Constants of Discrete Sobolev Inequalities
on a Weighted Complete Graph,
Symmetry, 2018, 10, 1; doi:10.3390/sym10010001.

Hiroyuki Yamagishi, Yoshinori Kametaka, Atsushi Nagai, Kohtaro Watanabe and Kazuo
Takemura,
The best estimation corresponding to continuous model of Thomson cable,
JSIAM Letters 5 (2013), pp. 53--56.

Kazuo Takemura, Atsushi Nagai, Yoshinori Kametaka, Kohtaro Watanabe and Hiroyuki
Yamagishi,
Sobolev inequality of free boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{2M}$,
Journal of Inequalities and Applications 2015:54 doi.org/10.1186/s13660-015-0568-9

Atsushi Nagai,
The Best Constant of Sobolev Inequalities Corresponding to Biharmonic Operator on a Disk
and a 3D Ball,
日本大学生産工学部研究報告 A, 2013 年 6 月第 46 巻第 1 号, pp. 11--15.

〔学会発表〕(計 4 件)

山岸 弘幸, 亀高 惟倫, 永井 敦, 渡辺 宏太郎, 武村 一雄,
切頂正多面体上の離散ソボレフ不等式の最良定数,
日本応用数理学会研究部会連合発表会, 2014 年 3 月 20 日, 京都大学.

山岸 弘幸, 亀高 惟倫, 永井 敦,
カーボンナノチューブトラス上の離散ソボレフ不等式の最良定数,
日本応用数理学会研究部会連合発表会, 2015 年 3 月 6 日, 明治大学.

亀高 惟倫, 永井 敦, 山岸 弘幸, 渡辺 宏太郎, 武村 一雄,
13 種 C60 フラーレンと離散ソボレフ不等式の最良定数,
日本応用数理学会年会, 2015 年 9 月 10 日, 金沢大学.

山岸 弘幸, 永井 敦, 亀高 惟倫,
棒のたわみの周期境界値問題とソボレフ不等式の最良定数,
日本応用数理学会年会, 2016 年 9 月 13 日, 北九州国際会議場.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：亀高 惟倫
ローマ字氏名：KAMETAKA, YOSHINORI
所属研究機関名：大阪大学
部局名：大学院基礎工学研究科
職名：名誉教授
研究者番号(8桁)：00047218

(2)研究協力者

研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。