

平成 30 年 6 月 15 日現在

機関番号：33903

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400147

研究課題名(和文) 極値的リーマン面とクライン面の解析

研究課題名(英文) Analysis of extremal Riemann surfaces and Klein surfaces

研究代表者

中村 豪 (NAKAMURA, Gou)

愛知工業大学・工学部・教授

研究者番号：50319208

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：1より大きい種数 $g$ の閉リーマン面のモジュライ空間において、 $g$ により定まる最大半径の円板(極値的円板)を許容するものの具体例を考察した。そしてそのフックス群表現による特徴付けと対称性の構造を解析することにより、自己同型群やタイヒミュラー空間上での位置など、いくつかの結果を得ることができた。また、向き付け不可能な曲面である極値的クライン面に対してもNEC群による表現を用いて同様の解析を行い、いくつかの結果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：In the moduli space of closed Riemann surfaces of genus  $g$ , where  $g$  is greater than 1, we studied examples of those admitting a disk of the largest radius determined by genus (extremal disk). By considering characterization of their Fuchsian group representations and the structure of symmetry, we obtained some results such as the groups of automorphisms and the locus of those surfaces in the Teichmüller space. We also made a similar analysis of non-orientable extremal Klein surfaces by considering their NEC group representations, and obtained some results.

研究分野：数物系科学

キーワード：複素解析 リーマン面 クライン面 極値的円板 自己同型群 モジュライ空間 解析学

### 1. 研究開始当初の背景

極値的円板についての研究背景について述べる。1990年代に C. Bavard は双曲的閉曲面が向き付け可能(リーマン面)・不可能(クライン面)の場合それぞれに対して埋め込むことのできる双曲円板の最大半径を種数  $g$  の値に応じて求めた。この最大半径の円板(極値的円板)を埋め込むことのできる曲面がもつ著しい特徴の一つとして、対応するフックス群、NEC 群それぞれの基本領域は双曲正  $(12g - 6)$  角形、双曲正  $(6g - 6)$  角形であることが知られている。正多角形を基本領域にもつリーマン面はその対称性からさまざまな研究がある。例として種数 2 の場合にフックス群のトレース体やワイエルシュトラス点すべてを求めた M. Naatanen, T. Kuusalo の研究が挙げられる。極値的円板に関する重要な問題として「2 個以上の極値的円板を含むすべてのリーマン面、クライン面を求めよ。」というのがある。これは研究代表者らによって完全に解決された。次に生じる問題として、ここで得られた具体的なリーマン面とクライン面がどのような特徴をもっているかを調べることが挙げられる。

次に対称リーマン面についての研究背景を述べる。古典的な結果として、A. Harnack は種数  $g$  の閉リーマン面上に作用する位数 2 の反等角自己同型写像の固定点集合は高々  $g+1$  個の単純閉曲線になることを証明した。その後、対称リーマン面に対するこの単純閉曲線(オーバル)の研究は E. Bujalance, D. Singerman, S. M. Natanzon らにより精力的に研究が行われている。特に、大きな位数の自己同型群をもつ対称リーマン面についての D. Singerman の研究及びこれまでに得られた結果の集大成的な著書である E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, G. Gromadzki の著書などは特筆すべきものである。また、E. Bujalance, F. J. Cirre, J. M. Gamboa, G. Gromadzki らは対称リーマン面に関する著書を出版しており、自己同型群とオーバル(スピーシーズ)との関係は活発に研究されている。

次にリーマン面上のグラフである dessin d'enfant についての研究背景を述べる。dessin d'enfant は Grothendieck により導入された概念である。現在では向き付けられた閉曲面上にある 2 色に色分けされた頂点をもつ連結グラフで、その補集合が有限個の位相円板となるものを意味する。これは次の G. V. Belyi による結果へとつながる: 閉リーマン面  $S$  が代数的数体上の既約多項式で定義されるための必要十分条件は  $S$  からリーマン球面への正則写像で分岐値が高々 3 点のものが存在することである。このときに現れる正則写像(Belyi 関数)と  $S$  の組の同値類は  $S$  上の dessin d'enfant の同値類と 1 対 1 の対応がつくことが知られている。2012 年には E. Gironde と G. Gonzalez-Diez によって dessin d'enfant に関するテキストが出版さ

れた。このような背景から、この分野は今後大きな発展を遂げると予想される。

### 2. 研究の目的

リーマン面は複素解析的手法によって研究されるばかりでなく、近年では曲面上の連結グラフである dessin d'enfant からの研究が活発になってきている。また、向き付け不可能な曲面であるクライン面は、そのダブルである対称リーマン面との関係から研究がなされている。本研究ではリーマン面の族のうち、特に極値的円板を許容するものを考察し、そのフックス群による特徴付けと対称性の構造を解析する。また、このリーマン面上での dessin d'enfant と Belyi 関数に関心がある。同様に極値的クライン面に対しては、NEC 群を用いてその特徴付けと対称性を解析する。そしてこの具体的な研究対象の解析を通して、リーマン面・クライン面の研究に新しい展開を与える。

### 3. 研究の方法

これまでの研究で得られた極値的リーマン面とクライン面の膨大なデータを整理することから始め、対称性を判定するためのプログラムを作成した。この目的のためにデスクトップパソコンを 1 台購入した。そして研究打合せや成果発表のために使用するノートパソコン 1 台の購入も不可欠であった。

連携研究者のもとへ出張を行い、モジュライ空間・タイヒミュラー空間・正則写像等についての知識の習得に努めた。また、学会・研究会等で多くの専門家と意見交換を行った。また、2015 年度には複素幾何の専門家が多く所属する Institut de Mathematiques de Jussieu - Paris Rive Gauche (パリ・フランス) に長期滞在して研究に専念する機会を作り進展に努めた。主に G. Courtois 氏、C. Bavard 氏、P. Pascal 氏、E. Gironde 氏、G. Gonzalez-Diez 氏らから数々の有益なアドバイスをいただいた。

研究内容を深めるために必要なリーマン面・クライン面関連の文献を収集して知識の習得に努めた。

近隣に所在する名城大学ではポテンシャル論セミナーが毎週開かれている。このセミナーに積極的に参加して知見を広げることにも努めた。

### 4. 研究成果

(1) 種数 2 の極値的リーマン面に対応するフックス群の表現として、9 個の生成元とそれらのなす 6 個の関係式が存在する。これはフックス群の基本領域が正 18 角形になることから導かれる。あるリーマン面に対して、そのフックス群の表現で標準的なもの、すなわち 4 個の生成元とそれらのなす 1 個の関係式を求めることができた。この標準的な生成元によりリーマン面に標識を与えて、タイヒミュラー空間の元とみなし、タイヒミュラー空

間の大域的座標系を用いてその座標を正確に計算することができた。極値的リーマン面の分布を知る上では意味のある結果と考える。

(2) 種数 3 の極値的リーマン面は等角同値を除いて 1726 種類存在することが知られている。このうち 2 個以上の極値的円板を許容するものはこれまで得られていたものより 3 種類多く、全部で 19 種類であることが判明した。この 3 種類の極値的リーマン面はちょうど 2 個の極値的円板を許容し、その埋め込み位置を求めることができた。これらのリーマン面の全自己同型群はすべて位数 2 の巡回群であった。また、すべて超楕円のリーマン面であり、8 個存在するワイエルシュトラス点の位置を得た。このうちの 1 種類は対称リーマン面であり、他の 2 種類は互いに反等角同値である。

(3) 種数 2 のある対称的かつ極値的リーマン面の自己等角写像と反自己等角写像のなす群は 3 つの位数 2 の巡回群の直積であること、位数 2 の反自己等角写像であるシメトリーは 4 つ存在することが判明した。このシメトリーによるリーマン面の商空間は、境界付きの向き付け不可能な曲面になることが判明した。また、種数 2 の極値的リーマン面を与えるフックス群は  $(2, 3, 18)$  型三角群の部分群である。これを利用してこの極値的リーマン面からリーマン球面への Belyi 関数を構成し、Belyi 関数から定まる dessin d'enfant を描いた。

(4) コンピュータを活用して種数 6 の向き付け不可能な極値的クライン面の自己同型群を得た。これにより種数 3 から 6 までの極値的クライン面の自己同型群を決定する問題は解決した。多くの自己同型群は自明なものであり、その他は位数 2, 3 の巡回群、位数 6, 10, 20 の二面体群などの基本的な群である。種数が 6 のとき、自己同型写像の最大位数は 10 であることが知られている。この位数をもつ極値的クライン面は同型を除いて 2 種類存在することが判明した。これを利用して、種数が 4 以上の偶数すべてに対して最大位数の自己同型写像をもつ向き付け不可能な極値的クライン面を 2 種類構成した。

(5) 固定した数の種数及び境界成分をもつ向き付けられた双曲的閉曲面の空間 (タイヒミュラー空間) を考察した。有限個の測地的長さ関数を導入することにより、この空間をある次元のユークリッド空間に埋め込むことが可能である。この埋め込みにより、写像類群によるタイヒミュラー空間への作用は有理変換で表現できることを示した。有理変換で記述できるという結果は意義が大きい。

(6) フランス滞在中に、極値的リーマン面を

モジュライ空間上の関数で特徴づけるというアイデアを得た。閉リーマン面のモジュライ空間上の関数として各リーマン面の最大単射半径を割り振るものを考え、この関数の最大値を与えるものが極値的リーマン面である。この関数を具体的に記述するために、タイヒミュラー空間上の関数とみなし、そこで座標系を用いることを考察した。特に種数が 2 の場合はタイヒミュラー空間の大域的座標は 7 つの測地的長さ関数を使うことにより得られているので、関数表現をある程度まで得ることができた。

(7) 開リーマン面  $S$  の開集合  $D$  に対して強い円板の性質を調べた。これは単位円板の内部が正則写像で  $S$  に埋め込まれ、かつ境界まで連続に  $S$  に埋め込まれるとき、その境界が  $D$  に含まれるならばその内部も  $D$  に含まれるという性質である。開リーマン面が単葉ならば開集合  $D$  の強い円板的性質は正則一様近似を導くことが証明できた。

(8) 種数 2 の閉リーマン面のタイヒミュラー空間に作用する写像類群を考察し、その位相的共役を除くすべての有限部分群に対して Humphries 生成元の積で表される生成系を与えることができた。また、写像類群のホモロジー群への作用は、写像類群からシンプレクティック群への表現を与える。種数 2 の閉リーマン面の基本群に対する標準的生成系から Humphries 生成元を構成し、その生成元に対する表現を得た。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Gou Nakamura, Toshihiro Nakanishi, Generation of finite subgroups of the mapping class group of genus 2 surface by Dehn twists, Journal of Pure and Applied Algebra, 査読有, Vol.222, 2018, pp.3585-3594

DOI: 10.1016/j.jpaa.2018.01.002

Gou Nakamura, Compact non-orientable surfaces of genus 6 with extremal metric discs, Conformal Geometry and Dynamics, 査読有, Vol.20, 2016, pp.218-234

DOI: 10.1090/ecgd/298

Abe Makoto, Gou Nakamura, Strong disk property for domains in open Riemann surfaces, Filomat, 査読有, Vol.30, 2016, pp.1711-1716

DOI: 10.2298/FIL1607711A

Gou Nakamura, Nakanishi Toshihiro, Parametrization of Teichmüller space by trace functions and action of mapping class group, Conformal

Geometry and Dynamics, 査読有, Vol.20, 2016, pp.25-42  
DOI: 10.1090/ecdg/289  
Gou Nakamura, Corrections to "Extremal disks and extremal surfaces of genus three", Kodai Mathematical Journal, 査読有, Vol.37, 2014, pp.475-480  
DOI: 10.2996/kmj/1404393899

〔学会発表〕(計 22 件)

Gou Nakamura, Riemann Surfaces and their Maximal Injectivity Radii, Workshop, リーマン面論の展望, 2017年12月2日, 山口大学理学部(山口市)  
中村 豪, 最大単射半径をもつ双曲曲面, 第60回函数論シンポジウム, 2017年10月9日, セントコア山口(山口市)  
鈴木紀明, 中村 豪, 熱方程式に関する Dirichlet 問題の多項式解, 2017年度日本数学会秋季総合分科会, 2017年9月11日, 山形大学(山形市)  
鈴木紀明, 中村 豪, 熱方程式に関する Dirichlet 問題の多項式解, ポテンシャル論研究集会, 2017年9月1日, 大同大学  
Gou Nakamura, Toshihiro Nakanishi, Presentation of finite subgroups of mapping class group of genus 2 surfaces by Dehn twists, Summer school 2017 of the IMJ-PRG, Mapping class groups and their representations, 2017年7月5日~7日, Institut de Mathematiques de Jussieu - Paris Rive Gauche パリ(フランス)  
阿部 誠, 中村 豪, Strong Disk Property for Domains in Open Riemann Surfaces, 東工大複素解析セミナー, 2017年5月31日, 東京工業大学本館(東京都)  
阿部 誠, 中村 豪, 開 Riemann 面内の領域に対する強い円板的性質, ポテンシャル論セミナー, 2017年5月12日, 名城大学理工学部(名古屋市)  
阿部 誠, 中村 豪, 開 Riemann 面内の領域に対する強い円板的性質, 2017年度日本数学会年会, 2017年3月25日, 首都大学東京(東京都)  
中村 豪, The largest maximal injectivity radius of hyperbolic surfaces, 複素解析セミナー, 2016年12月9日, 大阪市立大学数学研究所(大阪市)  
中村 豪, The largest maximal injectivity radius of compact Riemann surfaces, リーマン面論の展望, 2016年12月2日, 山口大学理学部(山口市)  
中村 豪, Hyperbolic surfaces with the largest maximal injectivity radius in the moduli space, 東北複素解析セミナー, 2016年10月12日, 東北大学情報科

学研究科(仙台市)  
中村 豪, Compact Klein surfaces admitting automorphisms of maximum order, ポテンシャル論セミナー, 2016年4月15日, 名城大学理工学部(名古屋市)

Gou Nakamura, Compact non-orientable surfaces of genus 6 with extremal metric discs, Seminaire Geometrie, 2016年1月22日, Institut de Mathematiques de Bordeaux, ボルドー(フランス)

Gou Nakamura, Compact non-orientable surfaces of genus 6 with extremal metric discs, Seminaire Teich, Institut de Mathematiques de Marseille, 2016年1月8日, マルセイユ(フランス)

Gou Nakamura, Compact hyperbolic surfaces with extremal discs, Seminaire d'Analyse et Geometrie, 2015年10月6日, Institut de Mathematiques de Jussieu - Paris Rive Gauche, パリ(フランス)

中西 敏浩, 中村 豪, タイヒミュラー空間のトレース関数による座標系と写像類群, 2015年度日本数学会秋季総合分科会, 2015年9月14日, 京都産業大学(京都市)

中村 豪, Compact Riemann surfaces and dessins d'enfants, リーマン面論の展望, 2014年12月14日, 山口大学理学部(山口市)

Gou Nakamura, Klein surfaces and NEC groups derived from hyperbolic surfaces, The 7th MSJ-SJ Hyperbolic Geometry and Geometric Group Theory, 2014年7月31日~8月3日, 東京大学大学院数理科学研究科(東京都)

中村 豪, Symmetric extremal Riemann surfaces of genus two, リーマン面論の展望, 2013年12月7日, 山口大学理学部(山口市)

中村 豪, Tori and symmetric Riemann surfaces of genus two, ポテンシャル論セミナー, 2013年10月18日, 名城大学理工学部(名古屋市)

① 中村 豪, Extremal disks and extremal surfaces, リーマン面の調和写像と擬等角写像, 2013年9月12日, 山口大学理学部(山口市)

② 中村 豪, Compact Riemann surfaces and dessins d'enfants, ポテンシャル論セミナー, 2013年4月19日, 名城大学理工学部(名古屋市)

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://ai.tech.ac.jp/~nakamura/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中村 豪 (NAKAMURA, Gou)  
愛知工業大学・工学部・教授  
研究者番号：50319208

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

中西 敏浩 (NAKANISHI, Toshihiro)  
島根大学・総合理工学研究科・教授  
研究者番号：00172354

(4) 研究協力者

なし