

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：54502

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400152

研究課題名(和文)シュレーディンガー型作用素と分数積分作用素の評価に関する研究

研究課題名(英文)Study on estimates of Schrodinger type operators and fractional integral operators

研究代表者

菅野 聡子 (Sugano, Satoko)

神戸市立工業高等専門学校・一般科・准教授

研究者番号：50316931

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：シュレーディンガー作用素に関連した作用素について、実解析的手法で研究を行った。非負の多項式を含むようなクラス(リバースヘルダークラス)に属するポテンシャルを持つシュレーディンガー型作用素の高階の場合について、基本解の評価および極大作用素での各点評価を示した。その応用として、これらの作用素の種々の関数空間での有界性およびどのような条件の下で特異性に関する結果が得られるかを示した。

研究成果の概要(英文)：I studied some operators concerning with Schrodinger operators with real analysis method. I showed estimates of the fundamental solution for higher order Schrodinger type operators with potentials which belong to the reverse Holder class which includes nonnegative polynomials and showed pointwise estimates with the maximal operator. As an application I showed that these operators are bounded on several function spaces and under which condition we can obtain some results concerning with singularity.

研究分野：解析学

キーワード：シュレーディンガー作用素 リバースヘルダークラス ハーディ・リトルウッドの極大作用素 カルデロン・ジグムント作用素

### 1. 研究開始当初の背景

$-u + Vu = 0$  の形をした方程式はシュレーディンガー方程式と呼ばれ、量子力学における基本方程式である。 $-u + V$  の部分をシュレーディンガー作用素という。シュレーディンガー作用素については、ポテンシャルが自由粒子、調和振動子の場合をはじめ、さまざまな条件の下で数学的に研究されている。また分数積分作用素については、それ自身興味があるばかりでなく、シュレーディンガー作用素を含む偏微分作用素と密接に関係のあるものであり、その性質について偏微分作用素への応用も含めて研究されている。

非負の多項式を含むようなクラス(リバースヘルダークラス)に属するポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素に関しては、1995年に基本解の評価および  $L^p$  有界性が研究された。その後この作用素に関する研究は、磁場作用をもつ場合(1996年)、分数べき作用素への拡張(1998年)、一様楕円型作用素への拡張(2000年)、というように発展した。さらに2007年には  $(-)^{2+V^2}$  の場合が研究された。この作用素の性質については、 $L^p$  有界性のみならずモリー空間における有界性、どのような条件の下でカルデロン・ジグムント作用素となるかなどが研究されている。自然数  $m$  に対して、 $(-)^{m+V^m}$  の形の作用素をシュレーディンガー型作用素と呼ぶ。最近、 $m$  が3以上で  $V$  が多項式の場合の研究がなされており、 $V$  がリバースヘルダークラスに属する場合への発展が期待されている。また、分数積分作用素に関しては、モリー空間に属する関数と分数積分との積がモリー空間に属するという不等式が1995年に研究された。この不等式の一般化に関する研究が活発になされており、シュレーディンガー作用素への応用も研究されている。それらの結果のうちの1つは最近、別の方向へ拡張されたが、これらの研究としてはまだ不十分である。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、上記のシュレーディンガー型作用素および分数積分作用素について、上記の結果の拡張、一般化することである。具体的には以下の2点である。

(1) 上記のシュレーディンガー型作用素について、 $V$  がリバースヘルダークラスに属し、 $m$  が3以上の場合に、基本解の評価および  $L^p$  空間、モリー空間での有界性、また、どのような条件の下で特異性が成り立つかどうかを明らかにする。

(2) 分数積分作用素については、モリー空間における結果である2011年の結果をオルリッツ-モリー空間に拡張する。また、2013年の結果を分数積分作用素が多重線形の場合、 $BMO$  空間に属する関数との交換子の場合について、どのような不等式が成り立つかを明らかにする。

### 3. 研究の方法

本研究に関連した文献はそのウェブサイトから無料でダウンロードできるもの他、購入した文献を利用し、レビューなどは MathSciNet を利用する。また、研究集会に積極的に参加し、校外の研究者と情報交換をし、自身の研究に生かす。また、必要に応じて他大学に出張し、セミナーに参加および発表を行い、研究の発展を目指す。また、成果発表を初年度より積極的に行うことでさらなる研究の発展のきっかけを得る。

実解析において、さまざまな作用素の性質を明らかにするために使われる道具として、極大作用素がある。この性質の研究については過去にとどまらず最近発展してきており、最新の結果を調査し、本研究に生かす。

シュレーディンガー型作用素については、ポテンシャルが非負の多項式の場合の研究がなされており、2009年のジバンスキーの結果が鍵となっている。ポテンシャルが非負の多項式の場合をリバースヘルダークラスの場合に拡張するためには、2009年のジバンスキーの結果をリバースヘルダークラスに拡張する必要があり、そのために関連した論文を調査し、入手する。

分数積分作用素に関しては、2011年の菅野の結果をオルリッツ-モリー空間に拡張するために、2008年の中井の結果などに関連した結果を調査する。また、分数積分作用素が多重線形の場合、 $BMO$  空間に属する関数との交換子の場合についても最近の動向を調査し、研究する。

### 4. 研究成果

$n$  次元ユークリッド空間上で高階のシュレーディンガー型の作用素を考える。ここでポテンシャルは非負の多項式を含むようなクラス(リバースヘルダークラス)に属するものとする。この作用素に関して、以下の結果を得た。

(1) 階数が2のべき乗の場合に、高階のカシオポリタイプの不等式を示し、それをもとにシュレーディンガー型作用素の基本解の高階導関数を実評価する不等式を得た。この不等式を利用し、シュレーディンガー型作用素の基本解の評価を証明し、それをを用いてその作用素と類似の作用素の  $L^p$  有界性を証明した。

(2) ポテンシャルをリバースヘルダークラスのうち最も狭いクラスに属すると仮定し、シュレーディンガー型作用素のハーディ・リトルウッドの極大作用素での各点評価を示した。この結果、これらの作用素がモリー空間でも有界となることが分かった。

上記のシュレーディンガー型作用素は、高階の場合はポテンシャルが多項式の場合しか研究されておらず、ポテンシャルがリバースヘルダークラスに属する場合の基本解の評価および  $L^p$  有界性については2階の場合が研究されていただけであった。これらの結

果は階数が2のべき乗の場合に限られるものの、ポテンシャルがリバースヘルダークラスに属する場合に拡張できた点で、意義深いと考えられる。

(3) 階数が2のべき乗の場合に、ポテンシャルは非負の多項式ならば満たす条件を仮定し、シュレーディンガー型作用素の基本解の高階導関数を評価する不等式を得た。この不等式をもとに、あるシュレーディンガー型作用素がカルデロン・ジグムント作用素であることを証明した。

(4) 非負の多項式ではなくて、リバースヘルダークラスに属し、あるシュレーディンガー型作用素がカルデロン・ジグムント作用素となるポテンシャルの例については、階数が1の場合に証明なしで述べられていた(2000年)。この例について、階数が2のべき乗の場合に拡張した形で述べ、証明した。

上記のシュレーディンガー型作用素の特異性については、ポテンシャルが多項式の場合およびリバースヘルダークラスに属する場合のいずれについても1階および2階の場合が研究されていただけであった(1993年, 2000年, 2007年)。これらの結果は階数が2のべき乗の場合に限られるものの、高階の場合に、ポテンシャルが多項式のみならずリバースヘルダークラスに属する場合に拡張できた点で、意義深いと考えられる。

(5) 階数が2のべき乗の場合の結果をふまえ、階数がすべての自然数の場合に、高階のカシオポリタイプの不等式を示し、 $V$  がリバースヘルダークラスに属するという仮定の他にある条件を仮定し、シュレーディンガー型作用素の基本解の評価を証明した。それを用いてシュレーディンガー型作用素のハーディ・リトルウッドの極大作用素での各点評価を示した。この結果を用いて、これらの作用素が $L^p$ 空間およびモリー空間でも有界となることを示した。

(6) (5)の結果を用いて、シュレーディンガー作用素のべき乗の形の作用素を、ラプラスのべき乗と、あるポテンシャルとの和で評価するような不等式を示した。

(5)の結果は階数が2のべき乗の場合に限られていたものをすべての自然数に拡張したものである。また、(6)の結果はポテンシャルが非負の多項式で階数が2の場合に限られていたものをポテンシャルがリバースヘルダークラスに属し、階数がすべての自然数の場合に拡張したものである。

上記のシュレーディンガー型作用素に関する $L^p$ 有界性を示すためには、基本解の評価が重要な役割を果たす。階数がすべての自然数の場合に基本解の評価を示すためには、 $V$  がリバースヘルダークラスに属する他にある条件を仮定する必要があるが、 $L^p$ 有界性はこの仮定なしで証明できた点で、意義深いと考えられる。

これまで、非負のポテンシャルを持つシュレーディンガー型作用素の高階の場合は、ポ

テンシャルが多項式の場合しか研究されていなかったが、ポテンシャルがリバースヘルダークラスに属する場合の諸問題を解決したものである。今後の展望としては、2階までの場合に研究されている、関連した作用素のさまざまな関数空間上での有界性に関する結果が3階以上の場合に示せることになるであろう。

分数積分作用素については、これらの問題の難しさから新たな結果を得るには至らなかったが、問題を考える過程においてその周辺を調査するうちにこれまでの研究の不十分な点が見つかった。この点では研究成果といえるであろう。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計2件)

1. Satoko Sugano, A Calderón-Zygmund operator of higher order Schrödinger type, Math. Nachr. 1--15 (2016) / DOI 10.1002/mana.201500123. 査読有
2. Satoko Sugano, Estimates of the fundamental solution for higher order Schrödinger type operators and their applications, J. Funct. Spaces Appl. 2013 (2013), Article ID 435480, 11 pages, DOI 10.155/3013/435480. 査読有

〔学会発表〕(計7件)

1. Satoko Sugano,  $L^p$  boundedness of higher order Schrödinger type operators, 4<sup>th</sup> East Asian Conference in Harmonic Analysis and Application, 2016年8月1日~2016年8月5日(発表予定), ソウル(韓国)
2. 菅野 聡子, 高階のシュレーディンガー型作用素の基本解の評価について, 2015年度調和解析セミナー, 2015年12月27日, 首都大学東京(東京都八王子市)(内容は報告集 pp.91--106 に所載)
3. 菅野 聡子, 高階のシュレーディンガー型作用素の基本解の評価について, 第26回「数理物理と微分方程式」研究集会, 2015年11月2日, ニューサンピア姫路ゆめさき(兵庫県姫路市)
4. 菅野 聡子, 高階のシュレーディンガー型作用素の $L^p$ 有界性について, 第25回「数理物理と微分方程式」研究集会, 2014年11月2日, 四季の湯 強羅静雲荘(神奈川県足柄下郡箱根町)
5. 菅野 聡子, 高階のシュレーディンガー型のカルデロン・ジグムント作用素について, 日本数学会 2014年度秋季総合分科会実函数論分科会一般講演, 2014年9月27日, 広島大学(広島県東広島市)
6. Satoko Sugano, Estimates of the fundamental solution for higher order

Schrödinger type operators and their applications, 1st East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications, 2013 年 10 月 25 日, ソウル (韓国) (内容は proceedings pp.11--14 に所載)

7. 菅野 聡子, 高階のシュレーディンガー型作用素の  $L^p$  有界性について, 2013 年 8 月 29 日, 第 35 回発展方程式若手セミナー, ヒルズサンピア山形 (山形県山形市) (内容は報告集 pp.113--122 に所載)

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

菅野 聡子 (Sugano Satoko)

神戸市立工業高等専門学校・一般科・准教授

研究者番号: 50316931

##### (2) 研究分担者

なし

##### (3) 連携研究者

なし