2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号： １５４０１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2013～2016
課題番号： ２５４００１５５
研究課題名（和文） 波の物体散乱の逆問題における囲い込み法の新展開

研究課題名（英文） New development of the enclosure method for inverse obstacle scattering

研究代表者
池畠　優（Ikehata, Masaru）

広島大学・工学研究院・教授

研究者番号：９０２０２９１０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：波の物体散乱の逆問題を、波の支配方程式が古典的な波動方程式、Maxwell方程式系であるとして定式化し、有限時間観測された波を用いた囲い込み法を、様々な境界条件の下で展開し、物体の存在する場所、形状さらには表面の状態を定量的または定性的に抽出する公式を確立した。さらに、有限物体内の未知の不連続性の位置についての情報をもたらす、ひとつの時間領域におけるinputを用いた囲い込み法を発見した。また、複雑な背景媒質内の未知の不連続性の存在、非存在についての情報を抽出し、さらに位置の情報を評価する不等式系を、波の支配方程式が変数係数波動方程式であるとして、囲い込み法を用いて確立した。

研究成果の概要（英文）：First, inverse obstacle scattering problems of waves governed by the classical wave equation and Maxwell system under several boundary conditions have been considered by using the enclosure method in the finite time domain. Several formulas for extracting information about the location, shape and further the quantitative and qualitative state of the surface of the obstacle from the observed wave are given. Second, a new version of the time domain enclosure method using a single input has been discovered.
Third, a method letting us know the estimation of the location together with the existence/nonexistence of unknown discontinuity embedded in a rough background medium from the observed wave has been introduced.

研究分野： 偏微分方程式に対する逆問題

キーワード： Inverse problems　enclosure method　inverse scattering　wave equation　Maxwell system

１．研究開始当初の背景

本研究でいうところの逆問題とは、様々な物理量からなる観測データから未知の対象に関する情報をいかに抽出するかという型の問題である。多くの重要な逆問題は偏微分方程式に対する逆問題として定式化され、観測データはその解を使って記述される。特に、生体あるいは材料などの非侵襲的あるいは非破壊的な検査などに由来する媒質中の空洞、介在物、亀裂、障害物などの不連続性を抽出する逆問題における直接的解法を見出す方向の研究で、研究代表者は探針法(The Probe Method)および囲い込み法(The Enclosure Method)を発見した。この二つの方法は、その時期を前後して提出された、Colton-Kirsch の線形サンプリング法、Kirsch の因数分解法および Potthast の特異源泉法とともに不連続性を抽出する逆問題における直接的解法の一群を形成し、広く世界の専門家に認知されている。

囲い込みとは、簡単に言うと、未知の不連続性を含む既知の媒質内を伝わる熱や波動などの信号の支配方程式の大きなパラメータを含んだ特別な解と観測された信号から指示関数と呼ばれる関数を構成し、その漸近挙動から不連続性を上から評価する領域を抽出する方法である。ただし用いる特別な解に応じて得られる領域は異なってくる。

ところで、囲い込み法は、熱や波動方程式で記述される、有限時間内に得られたデータを用いる不連続性を抽出する逆問題に、驚くほど自然に適用できるという知見が既に得られている。それは研究代表者の空間 1 次元の問題を扱った論文 (Ikehata, M., Appl. Anal., 86(2007), 963-1005) を出発点とし、本来の 3 次元の問題にも適用できることが分かってきた。しかし、それは、肥沃かもしれない手付かずの大地を見出したという段階であり、実際にさまざまな収穫が得られるということを、個々の具体的かつ重要な逆問題に適用してみせなければならない。

２．研究の目的

本研究では、研究代表者が創始した囲い込み法を用いて、波動現象等を記述する基本的かつ重要な偏微分方程式(系)に対する逆問題を研究するとともに、囲い込み法それ自身の可能性を徹底的に追求する。具体的には次の(1), (2)の枠内での問題である。

(1)全空間(あるいは非有界領域)に埋め込まれた不連続性の抽出。

物体から離れた場所で、 初期データを与えて波を発生させ、その波を物体に当て散乱させる。散乱された波を物体から有限の距離だけ離れた場所で有限時間観測する。

観測された波形データから物体の位置あるいは形状についての情報を抽出する問題。

研究代表者は、 波の支配方程式が物体外部で古典的な波動方程式, 物体表面上エネルギーが失われる消散的境界条件であるとして、この問題に対して、 囲い込み法を用いて次の二つの知見を得ている。

ひとつは、 未知の物体を囲む既知の曲面上における、有限観測時間における波形データから, 曲面の外部においた初期データの台(発信源)と物体との距離を陽に抽出できること。もうひとつは、初期データを発生させた場所で観測された波、 すなわち, 後方散乱データから, 初期データの台と物体との距離が陽に抽出できることである。

特にふたつめは、 データを発生させる場所と観測する場所が局所化されている場合における囲い込み法の新しい展開を与えた点に意義がある。

そして研究代表者によってすでに得られている知見によれば、物体表面上の境界条件が同次 Neumann または Dirichlet の場合、

与えられた物体外の固定した一点に対して、その点に最も近い物体表面上のすべての点を適当な無限個の初期データで発生した波の後方散乱データからすべて抽出できることおよびその任意の一点が既知であるとすればその点における Gauss 曲率および平均曲率が、 ２個の適当な初期データに対する後方散乱データから抽出できる。 この意義は、限られた境界条件ではあるが, 物体表面の形状に関する重要な量である Gauss 曲率および平均曲率が抽出できることが示された点にある。これが、有限の距離でデータを得ることの利点の一つと思われる。なお、Lax-Phillips, Majda らの古典的結果において、彼らの散乱データである散乱核から

これら二つの曲率を抽出する結果は研究代表者の知る限り存在しない。

このような現状において、(1)の枠内で取り組む問題は以下のとおりである。

① 消散的境界条件を持つ物体や

消散的媒質内の物体の幾何学的形状および境界条件の抽出。

消散的境界条件を持つ物体については、存在する場所の情報が囲い込み法を用いて

後方散乱データから抽出できることが

分かったが、ではその境界条件にあらわれる係数を求めることができるか。

他の境界条件の場合あるいは消散的媒質内に置かれた物体についてはどうか。

② 他の型のデータ。

後方散乱データではなく波を発生させる場所と受け取る場所が異なる場合は

どうか。 受け取る場所が異なることによる利点欠点はなにか。

③ 既知の物体の背後にある未知の

物体の情報の抽出。

観測者から見て、既知の物体の背後に隠れていて見えない物体についての情報を、

観測者側から波を発生させて後方散乱データを観測する。このデータから隠れた物体についての情報を抽出せよ。

④ 多層問題や wave guide。

背景にある媒質が均質の場合においては、重要な観測データである、後方散乱データを使った囲い込み法の理解は進んでいる。しかし、それが２層(あるいは多層)からなり、 一方の層に未知の物体があり他層から波を発生させたときの後方散乱データからなにがわかるかという問題についてはまだである。また, wave guide 内にある物体の再構成についても後方散乱データを用いた囲い込み法を展開するのは興味深い。
⑤　動く物体。
不連続性が時間とともに動く場合にその位置や形状を決定するというのも重要な逆問題で、この型の問題に対して囲い込み法がどのように適用できるかは大変興味ある問題である。
⑥　連立偏微分方程式系への展開。
支配方程式が単独ではなく、弾性体の変位場の方程式系や Maxwell 方程式系のように連立である場合に、時間依存データを用いた囲い込み法を実現すること。

(2) 有限物体内に埋め込まれた不連続性の抽出。(1)で述べた問題は非有界領域に埋め込まれた物体についての問題であるが、 有限の大きさを持った既知の物体内に埋め込まれた未知の物体(不連続性)の位置や形状を、既知の物体表面上で波を励起し内部に波を送り、伝搬してきた波を表面上で観測して抽出する問題も基本的で重要である。これについても支配方程式がさまざまな場合について取り組む。熱方程式の場合にも類似の問題が考えられ、囲い込み法のさまざまな version が実現されており、さらに、背景が非均質であっても等方的な場合、 複素幾何光学解を使った指示関数から未知の介在物の凸包の情報が抽出できることも示されている。 しかし、波動方程式等においては、背景が非均質である場合、この型の問題を考えると、用いる解の構成に困難が生じることがわかる。 これをどうするか。

３．研究の方法
ひたすら考察を重ね問題点と証明を見出すことが中心である。基本的で重要な逆問題を取り上げることが重要であるが、そのために、広く逆問題および偏微分方程式について文献収集を行い知見を高め、研究集会に参加して他の研究者との情報交換を行う。

４．研究成果
(1) 形状および位置が未知の、有限の大きさの物体の外部で、小さい半径を持つ球状の台を持つ初期データを与えて波を発生させ、その波を物体に当て散乱さえ、散乱された波を物体から有限の距離だけ離れた場所で有限時間観測する。このデータから物体の位置、形状さらには表面の状態についての情報を抽出する問題を、波の支配方程式は古典的な波動方程式であるとして定式化し、次の三つの知見を得た。
①解としての波が満たす物体表面上の境界条件が Dirichlet 境界条件かつ観測する場所が球状で初期データの台と必ずしも一致しない場合。まず初期データの台の中心と観測する場所の中心を焦点とする回転楕円面のなかでその外部が物体を含むもののうち最大のものを、観測データから抽出できることを示した。次にその系として，最大回転楕円面と物体表面が接触するすべての点の位置を得る手続きを確立した。また、例えば物体が凸である場合、最大回転楕円面と物体表面が接触する点は一個からなるが、その点における物体表面の Gauss 曲率と物体の形作用素で変形した平均曲率が観測データから抽出されることを示した。
②Robin 境界条件かつ観測する場所が初期データの台と一致する場合。まず Neumann 境界条件の場合の自身による以前の結果の、Robin 境界条件の場合への拡張を行った。次に、初期データの台の中心に最も近い物体表面上の点が既知であるとし、この点における Robin 境界条件の係数の値を、例えばその点の近くで物体の形状が既知であるという仮定の下で、一個の初期データに対する観測データから陽に抽出する公式を確立した。
③消散的境界条件かつ観測する場所が初期データの台と一致する場合。解である波の満たす物体表面上の境界条件にあらわれる、エネルギーの減衰に貢献する係数の値を求める公式を確立した。

(2) 空間的に局在する初期データによって波を生成させ、同じ発生場所で有限時間波を観測して、複雑な既知の背景媒質に埋め込まれた未知の物体の存在する場所やその定性的性質を抽出する問題を、波動方程式に対する逆問題として定式化し、時間領域における波の物体散乱の逆問題に対する囲い込み法を展開した。その結果、観測場所と物体との距離の評価を与える不等式系や物体の定性的性質の情報を与える公式を導いた。これは本来 Maxwell 方程式系に対して展開される方法の雛型となると考えている。結果は多層問題をカバーし、さらには波が透過できる既知の物体の背後の未知の物体についての存在、非存在や位置についての情報ももたらしている。また消散的媒質内の不連続性についてもその位置にいての情報を与える公式も確立した。

(3) 有限の大きさを持った既知の物体内に埋め込まれた未知の不連続性の位置や形状を、既知の物体表面上で波を励起し内部に送り、伝搬してきた波を表面上で有限時間観測して抽出する問題を、3 次元有界領域における波動方程式に対する逆問題として定式化し、囲い込み法のさらなる可能性を追求した。その結果、物体の外部に仮想的に与えた点と物体内部に埋め込まれた未知の不連続性と

の最短距離を、物体表面上で有限時間観測された波から陽に抽出する極めて簡潔な方法を見出した。これが従来の囲い込みと決定的に違うのは、次の2点である。ひとつは、波を励起させるための物体表面上に与える時間領域における Neumann データが仮想的に与えた点に応じて一個ずつ自然に与えられているということである。熱方程式を支配方程式とする類似の問題において展開した従来の時間領域における囲い込み法は，仮想的に与えた点と不連続性との距離を求めるために、大きなパラメータに依存した理論上は無限個の Neumann データが必要であったことから見るとこれは決定的な違いである。一つの input が一つの情報をもたらすということで、きわめて自然である。もうひとつは、その Neumann データは、全空間で支配方程式の初期値問題を半群の理論の枠内で解くことで与えられるという点にある。これはこの新しい方法の汎用性と適用可能性が大いに期待できるということを意味する。
今後はこれをさまざまなタイプの時間領域における偏微分方程式を支配方程式とする逆問題に展開することは大変興味ある課題であろう。

(4) 時間領域における波の物体散乱の逆問題における囲い込み法を、支配方程式が偏微分方程式系で記述される波へ展開することは大きな課題であった。今回 Maxwell 方程式系を支配方程式とする波の物体散乱の逆問題について、囲い込み法を指導原理として研究した。詳しくは次のとおりである。形状および位置が未知の、有限の大きさの物体を考える。その外部で、任意に与えた方
向に向けられたダイポールアンテナの数学的モデルである空間的に局在した源泉項によって初期時刻に電磁波を発生させ、物体から散乱された電磁波を源泉項の台と同じ場所で有限時間観測する。こうして得られた観測データから物体の位置あるいは形状についての情報を抽出する問題を波の支配方程式は定数係数の Maxwell 方程式系として定式化した。
① 物体表面上の境界条件が完全導体の場合
得られた知見は主に次の二つである。一つは、源泉項の台の中心と物体との最短距離の情報を陽に抽出する公式で、波動方程式において既に確立している公式に対応しているが、源泉項の方向についての影響は全くあらわれず予想外であった。もう一つは、源泉項の台の中心と物体との最短距離を実現する物体表面上の点における Gauss および平均曲率を抽出する公式の確立である。この結果は、源泉項の方向の影響を係数として含んでおりその方向次第で結果が見えにくくなることも分かった。
② 物体表面上の境界条件は
Leontovich の条件とし、主に次の二つの公式を得た。一つは、源泉項の台の中心と物体との最短距離の情報を陽に抽出する公式で、源泉項の方向についての影響を避けるため、二つの線形独立な方向に向けられた源泉によって生成された二組の波から作られる指示関数を用いている。もう一つは、物体表面上の Leontovich 境界条件にあらわれる係数の定性的な情報を指示関数から抽出する公式である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１１件）

1. <u>Masaru Ikehata</u>, On finding an obstacle with Leontovich boundary condition via the time domain enclosure method, Inverse Problems and Imaging, 11, 99-123, 2017, 10.3934/ipi.2017006, 査読有
2. <u>Masaru Ikehata</u>, A remark on finding the coefficient of the dissipative boundary condition via the enclosure method in the time domain, Math. Mech. Appl. Sci., 40, 915-927, 2017, 10.1002/mma.4021, 査読有
3. <u>Masaru Ikehata</u>, The enclosure method for inverse obstacle scattering over a finite time interval: IV. Extraction from a single point on the graph of the response operator, J. Inverse Ill-Posed Probl., 2017, 10.1515/jiip-2016-0023, 査読有
4. <u>Masaru Ikehata</u>, Kiwoon Kwon, Trusted frequency region of convergence for the enclosure method in thermal imaging, J. Ill-Posed Probl., 25, 81-98, 2017, 10.1515/jiip-2016-0001, 査読有
5. <u>Masaru Ikehata</u>, <u>Hiromichi Itou</u>, Sasamoto Akira, The enclosure method for an inverse problem arising from a spot welding, Math. Mech. Appl. Sci., 39, 3565-3575, 2016, 10.1002/mma.3799, 査読有
6. <u>Masaru Ikehata</u>, The enclosure method for inverse obstacle scattering using a single electromagnetic wave in time domain, Inverse Problems and Imaging, 10,131-163,2016,10.3934/ipi.2016.10.131,査読有
7. <u>Masaru Ikehata</u>, On finding an obstacle embedded in the rough background medium via the enclosure method in the time domain, Inverse Problems, 31, 085011(21pp), 2015, 10.1088/0266-5611/31/8/085011, 査読有
8. <u>Masaru Ikehata</u>, Mishio Kawashita, An inverse problem for a

three-dimensional heat equation in thermal imaging and the enclosure method, Inverse Problems and Imaging, 8, 1073-1116, 2014, 10.3934/ipi.2014.8.1073, 査読有

9. Masaru Ikehata, Mishio Kawashita, Estimates of the integral kernels arising from inverse problems for a three-dimensional heat equation in thermal imaging, Kyoto J. Math., 54, 1-50, 2014, 10.1215/21562261-2400265, 査読有
10. Masaru Ikehata, Extracting the geometry of an obstacle and a zeroth-order coefficient of a boundary condition via the enclosure method using a single reflected wave over a finite time interval, Inverse Problems, 30,045011(24pp),2014,10.1088/0266-5611/30/4/045011,査読有
11. Masaru Ikehata, The enclosure method for inverse obstacle scattering problems with dynamical data over a finite time interval:III. Sound-soft obstacle and bistatic data, 29, 085013(35pp),2013, 10.1088/0266-5611/29/8/085013,査読有

〔学会発表〕(計１８件)

1. Masaru Ikehata, The enclosure method for inverse obstacle scattering over a finite time interval:IV. Extraction from a single point on the graph of the response operator, Inverse problems for partial differential equations, 2017.1.26, 京都大学数理解析研究所(京都)
2. Masaru Ikehata, The probe and enclosure methods for inverse obstacle problems governed by partial differential equations, ICUB Talks:Exact Sciences Section, 2016.11.10, Bucharest(Romania)
3. Masaru Ikehata, The enclosure method for the Maxwell system in time domain, Geometry of solutions of PDE's and related inverse problems, 2016.10.6, 東北大学(仙台)
4. 池畠 優, On finding an obstacle with the Leontovich boundary condition via the time domain enclosure method, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会函数方程式論分科会, 2016.9.17, 関西大学(大阪)
5. 池畠 優, On finding an obstacle embedded in the rough background medium via the enclosure method in the time domain, 日本数学会 2016 年度年会函数方程式論分科会, 2016.3.19, 筑波大学 (茨城)
6. Masaru Ikehata, The enclosure method for inverse obstacle scattering in time domain, Workshop on Analysis in Kagurazaka 2016, 2016.1.22, 東京理科大学(東京)
7. 池畠 優, The enclosure method for inverse obstacle scattering using a solution of the Maxwell system in the time domain, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会函数方程式論分科会, 2015.9.15, 京都産業大学(京都)
8. 池畠 優, 伊藤弘道, 笹本明, The enclosure method for the evaluation of the spot welding area using a solution of the Laplace equation, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会函数方程式論分科会, 2015.9.13, 京都産業大学(京都)
9. Masaru Ikehata, The enclosure method for inverse obstacle scattering using a single electromagnetic wave in time domain, Minisymposium (M21) Reconstruction methods for inverse problems (Part 1), Applied Inverse Problems Conference AIPC 2015, 2015.5.28, Helsinki (Finland)
10. Masaru Ikehata, Some recent results on inverse obstacle scattering in time domain using the enclosure method, Inverse problems of differential equations and related topics, 2015.1.28, 京都大学数理解析研究所(京都)
11. 池畠 優, The enclosure method for inverse scattering using a solution of the Maxwell system in time domain, 熊本大学応用解析セミナー, 2014.12.13, 熊本大学(熊本)
12. 池畠 優, The enclosure method for inverse obstacle scattering using a solution of the Maxwell system in time domain, 大阪大学数学教室微分方程式セミナー, 2014.10.31, 大阪大学(大阪)
13. 池畠 優, 時間領域における波の物体散乱の逆問題と囲い込み法, 日本応用数理学会 2014 年度年会セッション「逆問題と信号処理」, 2014.9.3, 政策研究大学院大学(東京)
14. Masaru Ikehata, Hiromichi Itou, On reconstruction of cavities in a three dimensional linearized viscoelasticity, Minisymposium (M14) Non-iterative reconstruction schemes for inverse problems, 7th International Conference ``Inverse Problems: Modeling and Simulation", 2014.5.28, Oldeniz-Fethiye (Turkey)
15. Masaru Ikehata, The enclosure method for inverse obstacle scattering in time domain, Minisymposium (M8) Analytical Numerical Methods for Inverse Problems, 7th International

Conference ``Inverse Problems:Modeling and Simulation”, 2014.5.28, Oldeniz-Fethiye (Turkey)

16. 池畠 優, The Enclosure Method for Inverse Obstacle Scattering, 第9回非線型の諸問題, 2013.9.6, 高知大学(高知)
17. Masaru Ikehata, The enclosure method using dynamical data, Applied Inverse Problem Conference, 2013.7.2, Daejeon(Korea)
18. 池畠 優, The enclosure method for an inverse obstacle scattering problem with dynamical bistatic data over a finite time interval, 愛媛大学解析セミナー, 2013.5.25, 愛媛大学(愛媛)

〔その他〕
ホームページ等

https://www.researchgate.net/profile/Masaru_Ikehata

６．研究組織
(1)研究代表者
池畠　優 (IKEHATA　MASARU)
広島大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号：９０２０２９１０
(2)連携研究者
伊藤　弘道(ITOU HIROMICHI)
東京理科大学・理学部・講師
研究者番号：３０４００７９０