様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１２４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2016
課題番号：２５４００１５６

研究課題名（和文）一般化された回転超曲面とその幾何学的発展問題

研究課題名（英文）The generalized rotational hypersurfaces and their geomteric evolution problems

研究代表者
長澤　壯之（NAGASAWA, Takeyuki）

埼玉大学・理工学研究科・教授

研究者番号：７０２０２２２３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：　超曲面に対する変分問題を扱う際、超曲面に何も仮定せずに扱うのは多くの場合困難である。何らかの対称性を仮定すると、曲線に対する変分問題に帰着される。ここでは、第一に、弾性シェルの非完全弾性衝突運動を中心線の運動に問題を帰着し、運動の数学モデルの提唱と数値解析を行った。第二に、与えられた関数を平均曲率とする一般化された回転超曲面の大域的存在を、母線の常微分方程式の大域解の存在に帰着する事で問題を完全に解決させた。第三の成果として、メビウス・エネルギーをメビウス不変性を保ったまま3つの形に分解出来る事を示し、その分解を用いる事で変分公式の導出と様々な関数空間における評価を得た。

研究成果の概要（英文）：　When we deal with variational problems for hypersurfaces, some difficulties may occur.　 Assuming some symmetry, the problems can be reduced to the problem of curves.　 Here we obtain three kind of results.　 First, we reduce the inelastic collision of elastic shell to the problem of centerline, and propose a mathematical model and perform numerical simulation.　Secondly, we study the global existence of rotational hypersurface with prescribed mean curvature.　The problem can be reduced to the global existence of solutions of an ordinary differential equation which the generating curve satisfies.　We resolve the problem completely for all types of hypersurfaces.　Lastly we deal with the Moebius energy.　We show that the energy can be decomposed into three parts keeping the Moebius invariance.　 By ude of the decomposition. the variational formulas are derived explicitly.　Furthermore we have their estimates on several function spaces.

研究分野：非線型解析

キーワード：一般化された回転超曲面　メビウス・エネルギー　メビウス不変性　変分公式　変分問題

１．研究開始当初の背景

超曲面に対する変分問題を扱う際、超曲面に何も仮定せずに扱うのは多くの場合困難である。何らかの対称性を仮定すると、曲線に対する変分問題に帰着される。ここでは、
（１）　弾性シェルの非完全弾性衝突運動
（２）　一般化された回転面の大域的存在
（３）　Möbius エネルギーの分解と応用
を扱う。それぞれについて、背景を記す。

（１）弾性シェルの非完全弾性衝突運動

固体の障害物によって動きを制限された弾性シェルの非完全弾性衝突運動の数学的モデルを提唱したい。シェルの中心線に対するエネルギーを定義し、その変分問題として運動をとらえる。最も単純なモデルは、シェルの重心の運動を考えるものであった。また、従来のモデルは、完全弾性衝突モデルであった。

（２）一般化された回転面の大域的存在

対称性を持つ曲面の代表的なものは回転面でその研究は Delauney (1841)まで遡る。それは３次元ユークリッド空間内の回転によって不変な局面である。これを一般化し、コンパクト Lie 群と n 次元ユークリッド空間内への余次元２の主軌道を持つ表現に対し、その主軌道の１径数族を超曲面を一般化された回転面という。このような超曲面が５タイプ 14 種類存在することはすでに知られていた。与えられた関数を平均曲率とする一般化された回転面の大域的存在は、3 次元空間内のタイプＩの場合が知られている。一般次元の場合は、関数が解析的という仮定の下で、タイプＩの場合のみ知られていた。その場合の関数の仮定を緩和可能性、あるいは他のタイプの場合の大域的存在が未解決であった。

（３）Möbius エネルギーの分解と応用

曲面に対する Willmore 汎関数や曲線に対する Möbius エネルギーは､共形変換(Möbius 変換)に関して不変である。特に、相似変換に関して不変である。そのようは、エネルギー最小元の存在を示すためには変分法の直説法が使いづらい。Möbius エネルギーはそれに加えて、エネルギー密度が特異性を有しているため、解析が容易でない。

Möbius エネルギーは、与えられた結び目のクラス内で標準的な形状を与えるという目的で 今井 淳 氏によって 1991 年に提唱された結び目エネルギーの一つで、1994 年に Möbius 変換によって不変である事が発見され、それ以降 Möbius エネルギーと呼ばれるようになった。相似変換は Möbius 変換の一つである。すなわち、このエネルギーは相似変換によって不変（スケール不変性）になる。一般にスケール不変なエネルギーの変分問題は解を持たない。スケール不変性によりエネルギー密度の集中を起こす事が避けらず、その結果、最小化列の収束が期待できないためである。結び目の場合は、エネルギー密度の集中は、結び目の一点集中（堅結び）に相当する。Möbius 不変性があれば、これを解消しうる。すなわち、堅結びが起こりそうになったら、それに近い球面に関して反転を行えばよい。球面に関する反転もメビウス変換であるので、エネルギー値を変えることなく、堅結び目を解消出来るのである。この方法で、Freedman-He-Wang は素結び目型に対する Möbius エネルギーの変分問題を肯定的に解決した。素結び目は堅結びが起こるとしても２か所以上同時に起こる事がないので、この方法が有効であった。素結び目でない、いわゆる合成結び目については、この方法は有効でなく、変分問題は解決されていない。それどころか、数値計算により、合成結び目型に対する変分問題の解は存在しないと予想されている(Kusner-Sallivan 予想)。この予想は正しいと思われているが。未解決問題である。Kusner-Sallivan 予想の解決も含め、Möbius エネルギーの性質を詳細に知る事は重要である。変分問題の基礎となる第一変分公式については、主値積分による表示は知られていたが、絶対可積分性を持つのか否かは明らかになってかった。表示も陽に求められているのは主要部のみであった。

２．研究の目的

曲線に対する解析に帰着される変分問題を解析する。そのため、次の点を明らかにする。

（１）弾性シェルの非完全弾性衝突運動

固体の障害物によって動きを制限された弾性シェルの非完全弾性衝突の数学モデルを提唱し、その数値解析を行う。シェルのセンター・ラインの運動に帰着し、曲線に対する変分問題を提唱する。時間を離散して随時変分問題を解くことで時間発展を記述する。

（２）一般化された回転面の大域的存在

与えられた関数を平均曲率とする一般化された回転面の大域的存在を全てのタイプで証明する。

（３）Möbius エネルギーの分解と応用

閉曲線(結び目)のエネルギーの一種で共計不変性を持つ Möbius エネルギーの解析と行う。特に、第一変分公式・第二変分公式を低階項まですべて陽に示し、さらに絶対可積分性などの性質を明らかにする。

３．研究の方法

（１）弾性シェルの非完全弾性衝突運動

ここでは、非完全弾性衝突を扱う。中心線の「定常状態と運動状態との曲率差の平方」と「両状態の局所長比と１との差の平方」の和をエネルギー密度とする弾性エネルギーを考える。これにシェルの重力ポテンシャル・エネルギーを加える。また、シェル内には気体が充填されているとし、シェル内に保有されるエネルギーも考慮する。これらの和から衝突により失われる運動エネルギー差し引いたものを総エネルギーとして汎関数を定義する。Hamilton の原理により運動方程式が導かれるが、それを直接解くのではなく、De Giorgi による最少化運動(minimizing movement)の考え方に基づき、時間を差分化項を加えて、変分問題を随時解くことでシェルの運動（時間発展）を追う。

（２）一般化された回転面の大域的存在

与えられた関数を平均曲率とする一般化された回転面の大域的存在は、ある常微分方程式の大域解の存在を示す事に帰着される。その方程式は時刻変数について特異点を持っているので、特異点をまたいで解が延長出来る事を示す。特異性を考慮した関数空間を用いる。回転面にタイプによって、方程式の形が異なるが、すべてのタイプに共通な枠組みで扱えるように関数空間を工夫する。

（３）Möbius エネルギーの分解と応用

Möbius エネルギーもエネルギー密度に特異性を持つ。これが見かけ上の特異性である事をエネルギーの分解を用いて示す。Möbius エネルギーは、Möbius 変換によって不変（Möbius 不変性）がその名前の由来になっている。この性質は、素結び目のクラスにおけるエネルギー最小元の存在に用いられた。Möbius 不変性は、スケール不変性より強い条件で、スケール不変なエネルギーは一般には最小元が存在しない事を考えると、Möbius 不変性の重要性がわかる。本研究で示すエネルギーの分解についても分解のそれぞれがこの性質を失わないようにする。分解を用いて、エネルギー密度の特異性の解消のみでなく、変分公式の密度の絶対可積分性などを示す。

４．研究成果

（１）弾性シェルの非完全弾性衝突運動

論文[5]において、固体の障害物によって動きを制限された弾性シェルの非完全弾性衝突の数学モデルを提唱し、その数値解析の結果を公表した。数値計算の結果は、実際弾性リングを用いた実験と比較すると、バウンズ現象をよく再現しているように見える。

（２）一般化された回転面の大域的存在

与えられた関数を平均曲率とする一般化された回転面の大域的存在については、関数の仮定は連続の場合に、すべてのタイプについて肯定的に解決された。

本研究費を申請する段階で、長澤は 剱持勝衛 との共同研究で、関数の仮定を連続のみに緩和し、タイプはⅠとⅡの場合の結果を学術誌に投稿していた。従って、この論文は本研究費によるものではないので下記の論文リストには挙がっていないが、本研究期間中に受理され、J. Math. Soc. Japan に掲載された。本研究は、この結果を継承するもので、すべてのタイプに対する結果を、関数に対する仮定の緩和したうえで、得た([1])。関数に関する仮定は連続性のみである。その結果、与えられた関数を平均曲率とする一般化された回転面の大域的存在問題は完全に解決された。

（３）Möbius エネルギーの分解と応用

結び目は３次元ユークリッド空間内の自己交叉を持たない閉曲線であるが、本研究では、Möbius エネルギーを一般次元のユークリッド空間内の閉曲線に対するエネルギーとして扱った。以下で得られた結果はすべて３次元に限定する必要はない。

まず、Möbius 不変性を保ったまま Möbius エネルギーを３つの部分に分解できる事を示した([3])。一つは結び目の曲がり具合を表す項である。二つめはねじれ具合を制御する項、三つ目は全ての結び目型における最小値（絶対定数）である。この分解の特長は、Möbius 不変性を崩す事無く、元のエネルギーの果たす役割によりエネルギーを分解できたことである。また、この分解により、エネルギー密度の特異性が見かけ上のものである事を示された。

さらに、分解されたそれぞれのエネルギーについて第一変分公式、第二変分公式を導出し、それらの密度に表れる特異性も見かけ上のものである事を示した([4])。この論文は、さまざまな関数空間における評価も得た。特に、特異性の解消が、絶対可積分性として解消される関数空間、有界性として解消される関数空間、連続性として解消される関空空間を明らかにした。この論文は、数学雑誌のレヴューを行う MathSciNet において、“ In conclusion, the paper is well written and definitely contains hard work and significant results.”(結果として、この論文は困難な手順と重要な結果を含みよく書かれている。)と高く評価された。

変分問題の解の有無については、勾配流の方法があるが、その方法を用いるためには、第一変分の二乗可積分空間における表現が必要になる。主要部は従来より知られており、残りの項は３階未満の擬部分作用素となることも分かっていた。この研究で得られた分解を用いることで、主要部のみでなく低階項も含めて第一変分の二乗可積分空間における表現を陽に書く下すことが出来た([2])。これは、勾配流の解析に寄与するもので、その大域解の存在の有無によって Kusner-Sallivan 予想の解決に結び付き得るものと思われる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５　件）

[1] T. Nagasawa, On the global existence of generalized rotational hypersurfaces with prescribied mean curvature in Euclidean spaces, II, Saitama Math. J. 31 (2017), 1-32, 査読有.

[2] A. Ishizeki and T. Nagasawa, The L^2-gradient of decomposed Möbius energies, Calc. Var. Partial Differential Equations 55 (2016), 査読有.

[3] A. Ishizeki and T. Nagasawa, The invariance of the decomposwd Möbius energies under the inversions with center on curves, J. Knot Theory Ramifications 26

(2016), 1650009-1-12, 査読有.
[4] A. Ishizeki and T. Nagasawa, A decomposition of Möbius energy II: Variational formulae and estimates, Math. Ann. 363 (2015), 617-635, 査読有.
[5] M. Kazama, S. Omata, T. Nagasawa, A. Kikuta and K. Svadlenka, A global model for impact of elastic shells and numerical implementation, Adv. Math. Sci. Appl. 23 (2013), 93-108, 査読有.

〔学会発表〕(計 20 件)

[1] T. Nagasawa, A Möbius invariant discretization and decomposition of Möbius energy, Second Workshop on Mathematical Analysis on Nonlinear Phenomena, 慶應義塾大学(神奈川県・横浜市), 2017年1月21日.
[2] T. Nagasawa, A Möbius invariant discretization and decomposition of Möbius energy, Analysis Seminar, Salzburg University, Salzburg (オーストリア), 2016年12月14日.
[3] T. Nagasawa, A Möbius invariant discretization and decomposition of Möbius energy, Mathematisches Oberseminar Spezielle Probleme der Analysis, RWTH Aachen University, Aachen (ドイツ), 2016年12月12日.
[4] T. Nagasawa, A Möbius invariant decomposition of the Möbius energy, Geometric Analysis-Seminar, Freiburg University, Freiburg (ドイツ), 2016年7月5日.
[5] 石関 彩, 長澤 壯之, 分解されたメビウス・エネルギーのメビウス不変性について, 日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会, 京都産業大学(京都府・京都市), 2015年9月15日.
[6] T. Nagasawa, A decomposition of the Möbius energy: Recent progress, consequences, and open problems, Geometric Energies with Kinks to Applications, Topology and Open Problems, Basel Univ., Basel (スイス), 2015年9月2日.
[7] A. Ishizeki and T. Nagasawa, A decomposition of the Möbius energy and consequences, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's 4th Italian-Japabese Workshop, Palinuro (イタリア), 2015年5月25-29日.
[8] 長澤 壯之, Decomposition of Möbius energy and its consequences, The 32nd Kyushu Symposium on Partial Differential Equations, 九州大学(福岡県・福岡市), 2015年1月29日.
[9] 長澤 壯之, Analytic approaches to the Möbius energy: History and recent yopics, Pattern formation and interface dynamics, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市), 2015年1月8日.
[10] 長澤 壯之, Variational formulae and estimates for decomposed Möbius energies, Shapes and other properties of solutions of PDEs, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市), 2014年11月6日.
[11] 長澤 壯之, Decomposition and Möbius energy and Möbius invariance of decomposed energies, Mathematical Approaches to Pattern Formation, 東北大学(宮城県・仙台市), 2014年10月28日.
[12] 石関 彩, 長澤 壯之, 分解されたメビウス・エネルギーの変分公式と評価, 日本数学会 函数方程式分科会, 広島大学(広島県・東広島市), 2014年9月26日.
[13] 長澤 壯之, A decomposition of Möbius energy II: Variational formulas and their estimates, Variatinal Problems and Nonlinear Partial Differential Equations, 東京理科大学(千葉県・野田市), 2014年9月9日.
[14] 長澤 壯之, メビウス・エネルギーの分解定理：幾何学的意味と解析的効用, 山口大学講演会, 東京大学応用解析セミナー, 東京大学(東京都・目黒区), 2014年7月24日.
[15] 長澤 壯之, メビウス・エネルギーの分解定理：幾何学的意味と解析的効用, 山口大学講演会, 九州大学幾何セミナー, 九州大学(福岡県・福岡市), 2014年5月16日.
[16] T. Nagasawa, A decomposition of Möbius energy II: Variational formulas and their estimates, Curvature-Application-Knots-Energies, Max Planck Institute, Leipzig (ドイツ), 2014年3月27日.
[17] 長澤 壯之, メビウス・エネルギーの分解定理：幾何学的意味と解析的効用, 山口大学講演会, 山口大学(山口県・山口市), 2014年2月14日.
[18] 長澤 壯之, メビウス・エネルギーの分解定理：幾何学的意味と解析的効用, 応用解析研究会, 早稲田大学(東京都・新宿区), 2013年10月5日.
[19] 石関 彩, 長澤 壯之, メビウス・エネルギーの分解と変分公式について, 日本数学会 函数方程式分科会, 愛媛大学(愛媛県・松山市), 2013年9月25日.
[20] 石関 彩, 長澤 壯之, メビウス・エネルギーの分解とメビウス不変性について, 日本数学会 幾何学分科会, 愛媛大学(愛媛県・松山市), 2013年9月24日.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：

種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/TakeyukiNagasawa.html

６．研究組織
(1)研究代表者
長澤 壯之（NAGASAWA, Takeyuki）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：70202223

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
立川 篤（TACHIKAWA, Atsusi）
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号：50188257
矢崎 成俊（YAZAKI, Shigetoshi）
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：00323874
高坂 良史（KOHSAKA, Yoshihito）
室蘭工業大学・工学研究科・准教授
H.26.10 より神戸大学・大学院海事科学研究科・准教授
研究者番号：00360967

(4)研究協力者
なし