様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2017
課題番号：２５４００１６２

研究課題名（和文）分散型方程式の解の性質

研究課題名（英文）Properties of solutions to dispersive equations

研究代表者
土居　伸一（DOI, Shin-ichi）

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：００２４３００６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：線形分散型方程式の解の諸性質と方程式の表象の幾何との関連を研究した。階数が２以上で、係数が非有界であるような変数係数分散型方程式に対するコーシー問題をユークリッド空間上で考え、コーシー問題が適切であるための必要条件および十分条件を得た。また波動方程式の計量に空間的にコンパクトな時間依存の摂動を加えたときの解作用素のノルムの時刻無限大での増大度について新しい結果を得た。

研究成果の概要（英文）：We studied the relations between various properties of solutions to linear dispersive equations and geometry of symbols of the equations. We considered the Cauchy problem for dispersive evolution equations with variable coefficients, which might be unbounded, of order greater than or equal to two on the Euclidean space, and obtained necessary conditions and sufficient conditions for the Cauchy problem to be well-posed. We also obtained new results on growth order of solutions to wave equations with time-dependent, spatially compact metric perturbations.

研究分野：関数方程式

キーワード：分散型方程式

１．研究開始当初の背景

ユークリッド標準計量とは限らないリーマン計量に付随したシュレディンガー方程式の解の特異性の研究は, 1995 年の Craig, Kappeler, Strauss [CKS] の仕事を期に本格化した。彼らは、ユークリッド空間上で漸近的にユークリッド標準計量に近づくようなリーマン計量に付随したラプラス作用素を主要部とするシュレディンガー発展方程式の解を考察し, 余接束上のある点を通る測地流の軌道が時間を負の無限大に近づけるとき無限遠に近づくならば、その点における超局所的な意味での解の滑らかさが初期値の減衰度に応じて上昇することを示した。この性質は超局所的平滑効果ともよばれる。

超局所的平滑効果が成立しないような余接束上の点の特徴づけに関する研究も Craig らの研究とほぼ同時期に発表された。1996 年、土居 [Do1] は一般の完備リーマン多様体上でリーマン計量に付随したシュレディンガー発展方程式を考察し、余接束上のある点に対し、その任意の近傍にいくらでも長い時間滞在するような測地流の軌道が存在するならば、その点において最も弱い意味での超局所的平滑効果が成り立たないことを示した。さらにリーマン多様体がある意味で漸近的に平坦あるいは双曲的な場合は、測地流が相対コンパクトな軌道をもつことと最も弱い意味での超局所的平滑効果が成り立たない点が存在することが同値であることなどを証明した。

他方、Craig らの仕事の精密化として, 1999 年 Wunsch [Wu] は超関数に対して特異性とともに 2 次的な振動を記述する一般化された波面集合を新たに定義し, いわゆる散乱計量（つまりユークリッド標準計量に漸近的に近い計量のある種の幾何学的一般化とよべるリーマン計量）に付随したシュレディンガー方程式に対して、その解の一般化された意味での波面集合の伝播定理を示した。

初期段階でのこれらの研究に触発されて, より一般の漸近的に平坦なリーマン計量やその幾何学的一般化である散乱計量に付随したシュレディンガー方程式の解の特異性の研究が大いに発展した。（土居[Do2~Do4], Wunsch[Wu], Robbiano-Zuily[RZ], 伊藤[It], 中村[Na], 伊藤-中村[IN] , Hassel-Wunsch [HW], Martinez-中村-Sordoni [MNS]などの研究を参照せよ。）それと並行して、リーマン多様体上のシュレディンガー方程式に対する解作用素のいろいろな関数空間の間での有界性の研究も進展した。

参考文献

[CKS] W. Craig, T. Kappeler and W. Strauss, Comm. Pure Appl. Math. Vol.48 (1995), 769-860. [Do1] S. Doi, Duke Math J. vol.82 (1996), 679-706. [Do2] S. Doi, Math. Ann. vol.318 (2000), no. 2, 355--389. [Do3] S. Doi, "Hyperbolic Problems and Related Topics," 185-199, Grad. Ser. Anal., International Press, Somerville, 2003. [Do4] S. Doi, Commun. Math. Phys. 250 (2004), no.3, 473-505. [HW] A.Hassell and J.Wunsch, Ann. of Math. (2) 162 (2005), no. 1, 487--523. [It] K. Ito, Comm. Partial Differential Equations 31(2006), no.10-12, 1735--1777. [IN] K. Ito and S. Nakamura, Amer. J. Math. 131 (2009), no. 6, 1835--1865. [MNS] A.Martinez, S.Nakamura, and V.Sordoni, Comm. Pure Appl. Math. 59 (2006), no. 9, 1330--1351. [Na] S. Nakamura, Duke Math. J. 126 (2005), no. 2, 349--367. [RZ] L. Robbiano and C. Zuily, Duke Math. J. 100 (1999), no. 1, 93--129. [Wu] J. Wunsch, Duke Math. J. vol.98 (1999), 137-186.

２．研究の目的

分散型方程式は、KdV 方程式、シュレディンガー方程式、薄板の方程式などを典型例とする偏微分方程式の重要なクラスであり、注目する性質によっては尺度を変えて考えることにより、波動現象を記述するもう 1 つの重要な偏微分方程式のクラスである双曲型方程式とも密接に関係していることが知られている。本研究の目的は、線形分散型方程式、特にシュレディンガー方程式の解の諸性質を方程式の表象の幾何との関連から解明することである。

(1)偏微分方程式の記述する波動現象と表象の 幾何との関連を調べるためのモデルとして、特性根の多重度が一定である対称双曲型擬微分方程式系の発展方程式をユークリッド空間上で考察し、解のエネルギーの初期値に関する一様増大度の下からの評価を得る。

(2)シュレディンガー方程式の測地流の幾何と解の大域構造との関連を研究するためのモデルとして, ユークリッド空間上での平坦な波動方程式に, 空間的にコンパクトで時間的には全時刻に渡る計量に関する摂動を加え, 解作用素のノルムが時刻無限大でどのような挙動をするか解明する。これまで高々１次の指数的増大度の場合にしか考察できていなかったので、今回はより大きな増大度をもつ場合を解析する。

(3)偏微分方程式の記述する波動現象と表象の 幾何との関連を超局所的な観点から調べるため、主表象が相異なる実固有値をもつような正値対称偏微分方程式系のあるモデルに対する境界値問題を考え、境界値の滑らかさと境界値問題の解の滑らかさの関係、特に

境界値の特異性が境界値問題の解の特異性にどのように伝播するか解析する。

(4)時間変数に関しては１階であるが空間変数に関しては２階以上であるような変数係数の分散型方程式に対する初期値問題が適切であるための必要条件および十分条件をを、２乗可積分関数空間をもとにした枠組みで研究する。

３．研究の方法

(1) 数理物理に由来する線形・非線形偏微分方程式の数学解析および線形偏微分方程式の超局所解析に関する最新の研究成果についての講演や研究打ち合わせを集中的に行うために毎年合宿形式の研究会を開催した。

2013 年度偏微分方程式集中セミナー
（期間 2013 年 8 月 6 日～8 月 8 日）
2014 年度偏微分方程式集中セミナー
（期間 2014 年 8 月 5 日～8 月 7 日）
2015 年度偏微分方程式集中セミナー
（期間 2015 年 8 月 5 日～8 月 7 日）
2016 年度偏微分方程式集中セミナー
（期間 2016 年 8 月 3 日～8 月 6 日）
2017 年度偏微分方程式集中セミナー
（期間 2017 年 8 月 7 日～8 月 9 日）

(2) 数学的手法としては、超局所解析的方法（擬微分作用素のワイル・ヘルマンダー演算法、準古典解析、フーリエ積分作用素）と関数解析的方法が基本となると考えられる。

(3)研究の目的(1)については摩擦項を持つ波動方程式の解のエネルギーの初期値に関する一様増大度の下からの評価が参考になると考えられる。研究の目的(2)については西谷氏、上田氏との 2012 年の共同研究が参考になると考えられる。研究の目的(4)については、十分条件に関しては [Do], [Ch]が, 必要条件に関しては[Ic]が参考になると考えられる。

参考文献
[Do] Doi, S., Comm. P.D.E 21 (1996), 163--178. [Ch] H. Chihara, Comm.P.D.E., 27 (2002), 1953--2005. [Ic] W.Ichinose, Osaka J. Math. 24 (1987), no. 4, 853--886.

４．研究成果

(1)偏微分方程式の記述する波動現象と表象の 幾何との関連を調べるため、特性根の多重度が一定である対称双曲型擬微分方程式系の発展方程式をユークリッド空間上で考察し、マイナス１階の擬微分作用素を法とした解の表示式を用いることにより、解のエネルギーの初期値に関する一様増大度の下からの評価が、方程式の主表象の陪特性曲線と副主表象を用いて記述できることがわかった。これは摩擦項を持つ波動方程式の解のエネルギーの初期値に関する一様増大度の下からの評価が、方程式の主表象の陪特性曲線に沿っての摩擦項の積分を用いて表現できることの自然な類似であり、弾性方程式やマクスウェル方程式などにも適用できると考えられる。ただし、ユークリッド空間ではなく、コンパクト多様体の場合には、Rauch-Taylor による結果が知られており、新規性という点では若干弱いといえる。

(2)ユークリッド空間上の定数係数波動方程式に対し、主要部であるシュレディンガー作用素に、空間的にコンパクトな集合上で、時空間に依存する摂動を加えたものを考え、その摂動をもつ波動方程式の解作用素のノルムが、与えられた増大度をもつようにすることが可能であるかどうか考察した。これまで高々１次の指数的増大度の場合にしか、解作用素が丁度同じ増大度をもつような例が構成されていなかったが、今回、任意の m 次の指数的増大度（ただしmは１以上の実数）を含むような、より大きな増大度をもつ場合にも、解作用素が丁度同じ増大度をもつような例を構成することに成功した。証明の鍵は、特性曲線が空間的には周期的であるが、ハミルトニアン自身は陪特性帯に沿ってしかるべき増大度で無限大に発散し、さらに様々な技術的要請をみたすように主表象を構成することであり、それ以外の部分、つまり超局所解析的手法による解のエネルギーの下からの評価ならびに部分積分の方法による解のエネルギーの上からの評価は従来の方法に従った。

(3)偏微分方程式の記述する波動現象と表象の 幾何との関連を超局所的な観点から調べるため、主表象が相異なる実固有値をもつような正値対称偏微分方程式系のあるモデルに対する境界値問題を考え、境界値の滑らかさと境界値問題の解の滑らかさの関係、特に境界値の特異性が境界値問題の解の特異性にどのように伝播するか解析し、以下に述べるような結果を得た。まず、モデルとなる境界値問題に対して、境界条件として与える関数に、境界条件としては与えない、解の境界値を対応させる作用素は、同じ指数のソボレフ空間の間の有界作用素であり、この作用素は異なる正準変換に付随する２種類のフーリエ積分作用素の有限個の合成を展開項とするような漸近展開をもつ。次に、解の特異性に関しては、粗く表現すると、境界条件として与える関数がある点で超局所的特異性をもてば、その点を通過し、境界で反射するような古典軌道上で解は超局所的特異性をもち、その超局所的特異性のソボレフ指数の意味での強さは境界で反射するごとに弱くなる。この解析を精密化することにより、境界条件として与える関数の波面集合は１点

からなるが、対応する解はいたるところ滑らかでないような例を構成することができる。

(4)時間変数に関しては１階であるが空間変数に関しては２階以上であるような変数係数の分散型方程式に対する初期値問題の適切性を、２乗可積分関数空間をもとにした枠組みで研究し、以下に述べるような結果を得た。まず、主要部が楕円型と限らず、階数も２階とは限らない、一般の変数係数の分散型方程式に対して、初期値問題が適切であるためには、主表象に対する陪特性曲線に沿っての副主表象の積分の虚部の有界性が必要であることを示した。これは主要部が２階楕円型の場合についての既存の結果の自然な拡張となっている。次に、主要部が楕円型と限らず、階数も２階とは限らない、変数係数の分散型方程式に対して、主要部の係数は有界であるが、主要部の階数に応じて低階項の係数があるオーダーで増大することを許容するような枠組みで、初期値問題が適切であるための十分条件を与えた。これは係数が有界な場合の既存の結果の拡張になっている。また楕円型とは限らない分散型方程式に対して、その主表象のハミルトン流に関する非捕捉性条件とある種のリヤプノフ関数の存在とが同等であることを示した。

(5)大阪大学の他の研究者と協力し、当該研究分野と関連の深い国内外の研究者を招聘して下記の研究集会を開催し、議論を深めるとともに、当該分野の発展に寄与した。

第 11 回　Linear and Nonlinear Waves
2013 年 10 月 30 日～11 月 1 日
ピアザ淡海　滋賀県立県民交流センター

第 12 回　Linear and Nonlinear Waves
2014 年 11 月 12 日～11 月 14 日
ピアザ淡海　滋賀県立県民交流センター

第 13 回　Linear and Nonlinear Waves
2015 年 11 月 3 日～11 月 5 日
ピアザ淡海　滋賀県立県民交流センター

第 14 回　Linear and Nonlinear Waves
2016 年 11 月 2 日～11 月 4 日
ピアザ淡海　滋賀県立県民交流センター

第 15 回 Linear and Nonlinear Waves
2017 年 11 月 2 日～11 月 4 日
ピアザ淡海　滋賀県立県民交流センター

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　０件）

〔学会発表〕（計　０件）

〔図書〕（計　０件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　土居　伸一（DOI，Shin-ichi）
　大阪大学・大学院理学研究科・教授
　研究者番号：００２４３００６

(2)研究分担者

　なし

(3)連携研究者

　なし

(4)研究協力者

　なし