

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 5 月 2 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400167

研究課題名(和文)非線形楕円型方程式の固有値問題と逆問題の解析

研究課題名(英文)Analysis of the nonlinear elliptic eigenvalue problems and inverse problems

研究代表者

柴田 徹太郎 (SHIBATA, TETSUTARO)

広島大学・工学研究院・教授

研究者番号：90216010

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：非線形常微分方程式の分岐曲線の漸近挙動の解析に関しては、生物学的・物理学的現象から導出された、自励系・非自励系の方程式の分岐曲線の大域的・局所的な漸近挙動の解析に取り組み、詳細な漸近公式を確立した。逆分岐問題に関しては、考察した方程式に含まれる定数が未知定数であると仮定したとき、方程式の分岐曲線の大域的挙動のみから未知の非線形項を決定できるか、などの研究課題にこれまでとは全く違う新しい視点から取り組み、成果を上げることができた。これらの成果により、今後の逆分岐問題の新しい切り口からの研究に対する基礎的結果を確立することができた。

研究成果の概要(英文)：In this study, we consider the inverse and direct bifurcation problems of nonlinear eigenvalue problems. For the direct problems, we establish the precise asymptotic formulas for the eigenvalue problems which have biological and physical background. For the inverse bifurcation problems, we consider the typical inverse problem for elliptic equations to understand well the structure of inverse problems. In particular, we concentrate on the study of the global structure of bifurcation curves for some nonlinear ordinary differential equations. We apply these precise asymptotic properties to the typical inverse bifurcation problem and obtained some fundamental and new results in this direction.

研究分野：数学解析

キーワード：関数方程式論 分岐曲線 漸近解析 固有値 逆問題 変分法

### 1. 研究開始当初の背景

非線形楕円型方程式の固有値問題は、物理学や生物学などに動機づけられた重要な数学的研究対象である。非線形固有値の漸近的性質は主として変分法や分岐理論などを用いて解析されていたが、古典的分岐理論のみでは分岐曲線の詳細な構造に関して、統一的な解明を与えてはいない状況にあった。その大きな理由は、ひとたび非線形項を変えると、分岐曲線の大域的挙動が大きく変化するので、それらを統一的に詳細に解析することは非常に困難を伴うからである。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、常微分方程式論的手法を中心に、変分法、特異摂動法等を援用して、非線形楕円型方程式の固有値問題と逆問題を研究することである。具体的には、主として次の課題に取り組むこととした。

(1) 非線形楕円型方程式の分岐曲線および対応する解の大域的挙動に関する漸近公式を確立する。具体的研究課題については以下の通りである。

非自励系の方程式や摩擦項を含む方程式の分岐曲線に関する漸近展開公式の確立。非線形常微分方程式の分岐問題に関しては、生物学的・物理学的観点から、非自励系の方程式や摩擦項を含む方程式の解析が必要不可欠である。また、解のノルムは生物の個体数を表すなど、非常に重要な情報を与える。これらの項を含む方程式の解や分岐曲線を  $L^q$  空間で考察し、詳細な漸近挙動の公式の確立を目指した。

考える領域が球の場合の分岐曲線や解の漸近挙動の解析。一般領域における非線形楕円型偏微分方程式の固有値問題に関しては、研究代表者の研究により、分岐パラメータが非常に大きいときの解の境界付近での振舞いは、考察する領域の幾何学的性質に依存することが解明されていた。本研究では、まず領域が球である場合に得られた結果を拡張することとした。

(2) 非線形逆問題方程式が未知の非線形項を含んでいる場合、分岐曲線の漸近挙動などの特徴から未知の非線形項を決定する、という新しい視点からの逆分岐問題を解析することを目的とした。具体的課題については以下の通りである。

方程式の分岐曲線の大域的挙動のみから、未知の非線形項を決定できるか

逆分岐問題として決定しうる、未知の非線形項の集合はどのようなものか

どのように非線形項の枠組みを設定すれ

ば、分岐曲線と非線形項は1対1に対応するか

以上の課題はこれまでとは全く違う視点から逆分岐問題を考察することになるので、今後の逆分岐問題の、新しい切り口からの研究に対する基礎的結果を確立することになる。

### 3. 研究の方法

(1) 各連携研究者の役割分担

2で述べた研究目的遂行のため、各連携研究者の役割分担を以下のようにした。

研究目的 (1) : 柴田、田中、倉田が担当

研究目的 (2) : 柴田、坂口が担当

(2) この研究を遂行するためには、研究打ち合わせ、情報収集、意見交換が重要である。そこで、本研究では、研究経費の多くを旅費として使用した。具体的には、以下の方法で研究を遂行した。

研究代表者と連携研究者(坂口教授、田中教授、倉田教授)との緊密な研究打ち合わせ

国際会議での成果発表と海外の研究者との情報交換

国内研究集会における成果発表および国内研究者との情報交換

上記の項目で得られた、研究遂行のための有力な手法・技術・成果の統合

(3) 資料や消耗品等の購入

最新の関連分野の研究について、本研究との関連性の深度や数学的テクニックの応用可能性を検討するため、新刊図書等専門書を購入した。その他、研究遂行のための文具や資料整理のためにコンピューター関連消耗品も購入した。

### 4. 研究成果

(1) 非線形常微分方程式の分岐曲線の大域的・局所的な漸近解析に関しては、以下のような成果を得た。

非線形常微分方程式の分岐曲線の漸近解析に関しては、大域的・局所的な振る舞いの研究を行った。まず、非自励の非線形項を持つロジスティック方程式に関し、解のノルムが無限大になるときの分岐曲線の漸近挙動を研究し、詳細な公式を得ることに成功した。また、分岐曲線の局所的な振る舞いに関しては、克蘭ダール・ラビノビッツの古典的な理論によって、理論上は詳細な漸近展開は可能であることは知られていた。しかし、現実にその理論を適用すると、分岐曲線の局所的な漸近展開を求めるためには、解の漸近展開

を求める必要があり、実際の計算を遂行する際にはかなり困難をとまなう。そこで、自励系の常微分方程式に対して有力なアプローチであるタイムマップ法を適用し、分岐曲線の局所的な漸近展開を容易に求めることに成功した。

特徴的な分岐曲線が現れる非線形項を持つ常微分方程式を考察し、詳細な漸近公式を確立することに取り組んだ。具体的には分岐曲線が無限回振動するような非線形方程式を考察した。この方程式は自励系なので、その分岐曲線の挙動はタイムマップを用いて考察可能ではあるが、実際の計算においてはいくつかの困難を伴う。それらの困難を巧みな積分計算により克服し、詳細な漸近公式を導いた。具体的には以下のような成果を得ることに成功した。分岐曲線が無限遠で大きく振動するもの、比較的小さく振動するもの、および単調減少的に振る舞う3つの非線形項に着目し、それらの分岐曲線の大域的挙動について特殊関数の漸近公式を巧みに利用して、詳細な漸近公式を確立することに成功した。

(2) 逆問題に関しては、以下の成果を得た。

(1) で求めた分岐曲線の大域的な漸近挙動から、ある条件下で、未知の非線形項を特定することに成功した。また、非線形項がべき乗タイプのロジスティック方程式に、無限大で指数的に減少するような非常に弱い摂動を加えた場合には、分岐曲線の大域的漸近挙動は、代数的減少というオーダーでは判別できない、という結果を得た。このことにより、分岐曲線の大域的挙動から未知の非線形項を決定するには、あらかじめ、2つの未知の非線形項に関するなんらかの条件が知られている必要があることが明らかになった。

これまでに確立した分岐曲線に関する漸近展開公式を逆問題的視点から詳細に考察した。考察する方程式に含まれる非線形項が未知であると仮定したとき、どのようなデータが与えられれば、未知の非線形項は特定できるか、またその精度はどのようにデータに依存するか、さらに考察する方程式に対して適切な逆問題の定式化とはどのようなものか、分岐曲線と非線形項が1対1対応であるための十分条件はどのようなものであるかなどの基本的な未解決問題を研究するためには、ある程度未知の非線形項の情報があらかじめ与えられている必要があること、さらにその条件はなるべく自然なものであることが望ましい。このことに着目し、未知の非線形項があらかじめ与えられたべき乗の非線形項から摂動したものであるという状況下で逆問題を考察した。その結果、今後の非線形固有値問題の逆問題に関する研究の基

礎となる一意性の結果を確立できた。さらに非線形項が3つの未知の係数を含む3次式であるとき、分岐曲線の大域的な漸近挙動と局所的な漸近挙動から、3つの未知の係数を特定できることを証明した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11件)

Tetsutaro Shibata, Global and local behavior of the bifurcation diagrams for semilinear problems, *Electronic Journal of Differential Equations*, 査読有, Vol. 2016, 2016, No. 201, pp. 1-11  
<http://ejde.math.txstate.edu/>

Tetsutaro Shibata, Inverse bifurcation problems for diffusive Holling-Tanner population model, *Mathematische Nachrichten*, 査読有, 289, 2016, 1934-1945  
DOI: 10.1002/mana.201500144

Tetsutaro Shibata, Asymptotic length of bifurcation curves related to inverse bifurcation problems, *J. Math. Anal. Appl.* 査読有, 438, 2016, 629-642  
DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.02.014

Tetsutaro Shibata, Oscillatory bifurcation for semilinear ordinary differential equations, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 査読有, 2016, No. 44, 1-13  
DOI: 10.14232/ejqtde.2016.1.44

Tetsutaro Shibata, Asymptotic behavior of the bifurcation diagrams for semilinear problems with application to inverse bifurcation problems, *International Journal of Differential Equations*, 査読有, Volume 2015, 2015, Article ID 138629, 11 pages  
<http://dx.doi.org/10.1155/2015/138629>

Tetsutaro Shibata, Asymptotic and oscillatory behavior of solution curve for nonlinear eigenvalue problem, *Nonlinear Analysis and Differential Equations*, 査読有, 3, 2015, no. 3, 97-110  
<http://dx.doi.org/10.12988/nade.2015.41124>

Tetsutaro Shibata, Inverse bifurcation problems for diffusive logistic equation of population dynamics, *J. Math. Anal. Appl.*, 413, 査読有, 2014, 495-501  
DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.12.004

Tetsutaro Shibata, S-shaped bifurcation curves for nonlinear two-parameter problems, *Nonlinear Analysis*, 査読有, 95, 2014, 796-808  
DOI: 10.1016/j.na.2013.10.015

Tetsutaro Shibata, Direct and inverse bifurcation problems for non-autonomous logistic equations, *Electron. J. Diff. Equ.*, 査読有, Vol. 2013, 2013, No. 117, 1-14  
<http://ejde.math.txstate.edu/>

Tetsutaro Shibata,  $L^2$ -inverse spectral problems for diffusive logistic equations of population dynamics, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 査読有, 43, 2013, 343-359  
DOI:10.1216/RMJ-2013-43-1-343

Tetsutaro Shibata, New method for computing the local behavior of  $L^q$ -bifurcation curve for logistic equations, *International Journal of Mathematical Analysis*, 査読有, 7, 2013, 1531-1541  
DOI.org/10.12988/ijma.2013.3232

〔学会発表〕(計 25件)

Tetsutaro Shibata, Oscillatory bifurcation for semilinear ordinary differential equations, 日本数学会2017年度年会、2017年3月24日、首都大学東京

Tetsutaro Shibata, Spectral asymptotics for inverse bifurcation problems, Inverse problems for partial differential equations and related areas, 2017年1月27日、Research Institute of Mathematical Sciences, Kyoto University, Japan

Tetsutaro Shibata, Direct and inverse bifurcation problems for semilinear equations, International Workshop on Nonlinear PDEs 2016 in Osaka, 2016年12月7日、I-site Namba, Osaka Prefecture University, Japan

Tetsutaro Shibata, Global and local structures of oscillatory bifurcation curves, 北九州地区における偏微分方程式研究集会、2016年11月26日、小倉リーセントホテル、小倉

Tetsutaro Shibata, Inverse and direct bifurcation problems for nonlinear eigenvalue problems, Geometry of solutions of PDE's and its related inverse

problems, 2016年10月7日、Tohoku University, Japan

Tetsutaro Shibata, Global behavior of bifurcation curves related to inverse bifurcation problems, 常微分方程式の定性的理論ワークショップ、2016年9月22日、島根大学

Tetsutaro Shibata, Asymptotic length of bifurcation curves related to inverse bifurcation problems, 日本数学会2016年度秋季総合分科会、2016年9月15日、関西大学

Tetsutaro Shibata, Asymptotic properties of bifurcation curves related to inverse bifurcation problems, The 41st Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 2016年8月8日、Hokkaido University, Japan

Tetsutaro Shibata, Global behavior of bifurcation curves related to inverse bifurcation problems, 応用解析研究会、2016年7月16日、早稲田大学理工学術院

Tetsutaro Shibata, Inverse bifurcation problems for the equation of population model, 日本数学会2016年度年会、2016年3月16日、筑波大学

Tetsutaro Shibata, Inverse and direct bifurcation problems for semilinear elliptic equations, 語ろう「数理解析」、2016年1月23日、明治大学中野キャンパス

Tetsutaro Shibata, Inverse and direct bifurcation problems for some ordinary differential equations, 岐阜数理科学セミナー、2015年5月29日、岐阜大学工学部

Tetsutaro Shibata, Global and local behavior of oscillatory bifurcation curve, 日本数学会2015年度年会、2015年3月21日、明治大学

Tetsutaro Shibata, Global and local behavior of oscillation bifurcation curve, International Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations, 2014年12月10日、Okayama International Center, Okayama, Japan

Tetsutaro Shibata, Global and local behavior of oscillation bifurcation curve, 北九州地区における偏微分方程式研究集会、2014年11月29日、小倉リーセントホテル、小倉

Tetsutaro Shibata, Inverse and direct bifurcation problems for nonlinear elliptic equations, 実領域における常微分方程式の定性的理論とその応用、2014年11月5日、京都大学数理解析研究所

Tetsutaro Shibata, Asymptotic behavior of the bifurcation diagrams for semilinear problems with cubic-like nonlinearity, 日本数学会2014年度秋季総合分科会、2014年9月25日、広島大学

Tetsutaro Shibata, Inverse and direct bifurcation problems for nonlinear elliptic equations, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014年7月8日、The Instituto de Ciencias Matematicas, The Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, Spain.

Tetsutaro Shibata, Inverse bifurcation problems determining nonlinear terms for nonlinear elliptic equations, 2014 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2014年3月28日、Pusan National University, Pusan, Korea.

Tetsutaro Shibata, S-shaped bifurcation curve for semilinear two-parameter problems, 日本数学会2014年度年会、2014年3月15日、学習院大学

① Tetsutaro Shibata, Inverse and direct bifurcation problems for semilinear elliptic equations, 非線形現象の数値シミュレーションと解析2014、2014年3月7日、北海道大学理学部

② Tetsutaro Shibata, Global and local behavior of bifurcation diagrams for semilinear problems, 第8回非線形偏微分方程式と変分問題、2014年2月8日、首都大学東京

③ Tetsutaro Shibata, Global and local behavior of bifurcation curve for semilinear eigenvalue problem, 日本数学会2013年度秋季総合分科会、2013年9月24日、愛媛大学

④ Tetsutaro Shibata, Asymptotic properties of bifurcation curves for nonlinear eigenvalue problems, 応用解析研究会、2013年7月6日、早稲田大学理工学術院

⑤ Tetsutaro Shibata, Asymptotic properties of bifurcation curves for nonlinear eigenvalue problems, 月曜解析セミナー、2013年5月20日、東北大学 理学研究科

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

柴田 徹太郎 (SHIBATA TETSUTARO)  
広島大学・大学院工学研究院・教授  
研究者番号：90216010

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

坂口 茂 (SAKAGUCHI SHIGERU)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号：50215620

田中 和永 (TANAKA KAZUNAGA)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号：20188288

倉田 和浩 (KURATA KAZUHIRO)  
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：10186489