2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成２９年　６月　１日現在

機関番号：１５４０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2013～2016

課題番号：２５４００１６９

研究課題名（和文）完全非線形楕円型・放物型偏微分方程式の解の挙動および特異性の解析

研究課題名（英文）Analysis on the behavior and the singularity of solutions to fully nonlinear elliptic and parabolic partial differential equations

研究代表者

滝本　和広（Kazuhiro, Takimoto）

広島大学・理学研究科・准教授

研究者番号：００３６３０４４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：完全非線形楕円型・放物型偏微分方程式に対し，その境界値問題の可解性や解の振る舞いを考察し，解の特異性について解析することで，非線形現象の解明を目指した。幾何学的な構造を持ったk-曲率方程式と呼ばれる完全非線形偏微分方程式の境界爆発問題の解の一意性，および広いクラスの放物型k-ヘッシアン方程式の大域解に対するBernstein型の定理を得た。

研究成果の概要（英文）：We study the solvability of the boundary value problem, and the behavior and the singularity of solutions for fully nonlinear elliptic and parabolic partial differential equations. We also aim for the investigation of nonlinear phenomena. New results are obtained on the uniqueness of solutions to the so-called k-curvature equation, which is a fully nonlinear partial differential equation having geometric structure. Also, we obtain Bernstein type theorems for the generalized parabolic k-Hessian equation.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：完全非線形偏微分方程式　境界値問題　粘性解　解の存在と一意性　関数方程式

１．研究開始当初の背景

自然現象や社会現象の数学的モデルとして偏微分方程式が登場するが，興味深い現象には非線形性が伴い，多くはモデルとなる微分方程式が完全非線形偏微分方程式となる。しかし，完全非線形偏微分方程式はその非線形性の強さのため，従来の線形理論の延長線上では捉えきれない厄介な性質をもっている。1980 年頃までは解析するための道具に乏しく，最も強力な解析方法は確率論的な手法であった。偏微分方程式の言葉で理解され理論が成熟し始めたのはここ 30 年程のことであり，現在でも重要な未解決問題が多い。一方で，完全非線形偏微分方程式は，物理学・微分幾何学・確率制御問題・数理ファイナンスなど様々な分野に広く関係しており，その研究は非常に重要な意味を持つものである。

実際に現象を数理的に表現したり研究したりすると，曲面の幾何や曲面上の解析が重要であることが多い。例えば石鹸膜は表面張力によって表面積を小さくしようとするため，枠に張られた石鹸膜は極小曲面（平均曲率が 0 である曲面）を実現している。極小曲面に関する問題はプラトー問題をはじめとして多くの数学者の興味を引きつけ，現在でも精力的に研究が行われている。さらに，金属を焼き鈍す際の界面の運動，転がりながら摩耗する石の運動のモデルは，それぞれ平均曲率流方程式，ガウス曲率流方程式で記述される。

幾何学的な構造を持った微分方程式の中には，微分幾何学でお馴染みのモンジュ・アンペール方程式の一般化である「ヘッシアン方程式」や，極小曲面問題やガウス曲率方程式を一般化した「曲率方程式」がある。これらは一般に退化した偏微分方程式であるため，ごく特殊なケースを除いては解析するための強力な手段が少ない。本格的な研究が始まったのは 1980 年代以降であるが，解の構造の深い理解には程遠い状態である。さらに，極小曲面には様々な特異性が出現しうることからもわかるように，ヘッシアン方程式や曲率方程式の解析においては，古典解ばかりでなくしかるべき広義解や弱解の概念を導入し研究を行う必要がある。そこで，解のクラスを広げる努力が始まり，1990 年代初めに「粘性解」と呼ばれる広いクラスの解における可解性の研究が進んだ。ヘッシアン方程式において Trudinger-Wang は非斉次項が連続でない場合を研究し，粘性解よりも広い ``weak solution"の概念を導入することで，その解の存在と一意性を示すことに初めて成功している。ところが，同じような広いクラスの解は曲率方程式に対しては発見されていなかった。それに対し，研究代表者は曲率方程式において「広義解」と呼ばれる解の概念を導入することに成功した。これにより，非斉次項がボレル測度のときの曲率方程式の広義解の可解性を考える準備ができたことになる。

加えて，孤立特異点または特異集合のまわりにおける解の挙動などといった解自身の性質については，主に半線形および準線形偏微分方程式に関してはなされてきたが，完全非線形な方程式では殆ど知られていなかった。こうした定量的な性質を得るには方程式に対する深い考察が必要である。

こうした流れの中で，研究代表者は曲率方程式に関する研究でこれまで下記のような結果を得た。まず，粘性解のクラスにおいて，曲率方程式の孤立特異点の除去可能性についての結果を得た。これは取り扱いが比較的易しい平均曲率方程式に関する結果を数十年ぶりに一般の場合に拡張したものである。その後，先程述べた広義解の概念を用いると，k 次基本対称関数により定まる曲率方程式においては(n-k)次元ハウスドルフ測度が 0 であるコンパクト集合が常に除去可能であることを証明した。ここで n は空間次元である。これらの結果の多くは曲率方程式に対する既存の研究方法とは異なる方法で得られたものであり，その解構造を深く理解する上での端緒となるとともに，非線形偏微分方程式の解析に新たな展開が得られると期待される。

また，曲率方程式において「境界爆発問題」と呼ばれる境界値問題の解の存在・非存在および境界付近における解の挙動に関する結果を得た。それと並行して，一般の完全非線形楕円型・放物型偏微分方程式についての研究も行い，ある条件を満たす完全非線形方程式の粘性解において，等高面は常に除去可能であることを証明した。最後に述べた結果は半線形および準線形方程式に関して既に知られていた結果の多くを含有するものである。

２．研究の目的

本研究の目的は，非線形性が非常に強く，解析するための道具が少ないために取り扱いが困難である「完全非線形」と呼ばれるクラスの楕円型・放物型偏微分方程式に対し，その境界値問題の可解性や解の振る舞いを考察し，解の特異性について解析することである。さらに，その中でも幾何学的な構造を持ったヘッシアン方程式や曲率方程式と呼ばれる方程式について詳細な解析を行うことで，非線形現象の解明を行う。

偏微分方程式において解の存在・一意性を調べることは重要な研究テーマの一つであり，「永遠のテーマ」でもある。その際，解の存在・一意性を研究するための強力な手法が解のアプリオリ評価と比較原理である。しかし，一般にアプリオリ評価を得るための条件は厳しく，例えば領域に角があったり，非斉次項の関数がある程度滑らかでなかったりすると条件は満たされない。そうしたとき，

粘性解や広義解などの弱い意味の解として考えると，扱える問題の範囲が広くなるので大変有用であり，応用上にも弱い意味の解の研究は大変意義深い。一方で，解の滑らかさについて考察することも重要である。本研究では古典解・弱い意味の解の双方を研究の対象とする。

また，一般の（仮定をできるだけ弱めた）完全非線形偏微分方程式に対する解析を行うと同時に，幾何学的な構造を持ったヘッシアン方程式や曲率方程式などについて詳細な解析を行うことで，非線形現象の解明も行う。

３．研究の方法

研究を遂行するため，完全非線形偏微分方程式などに関する先行研究の文献を調査し，国内外の研究者との研究連絡および情報収集を行うため学会・研究集会に参加した。国内の非線形偏微分方程式論の専門家との研究討議を積極的に行うと共に，平成 26 年はスペイン，平成 27 年はイタリア，平成 28 年はアメリカでの国際研究集会に参加して国外の研究者との意見交換を行った。その結果，次項に述べる研究結果を得ることができた。また，文献調査のために書籍を，論文作成・資料整理の必要上パーソナルコンピュータを購入した。

４．研究成果

主な研究成果は以下の通りである。

(1) k 次基本対称関数（k=1,…,n，ここで n は空間次元）により定まる曲率方程式（以下，k-曲率方程式と呼ぶ）について研究を行った。与えられた領域の境界に近づくとき解が正の無限大に発散するという境界条件（境界爆発条件）を課した k-曲率方程式については，粘性解のクラスにおける解の存在・非存在，および境界付近における解の挙動に関する結果が既に得られているが，新たに解の一意性に関する解析を行った。解の一意性についての結果は，k-曲率方程式の特別な場合である平均曲率方程式（k=1）に対しても新しいものである。その結果をまとめた論文が Journal of Mathematical Analysis and Applications 誌に掲載された。（中森さおり氏（広島大学）との共同研究）

(2) 極小曲面に関して Bernstein は「R^2 全体で定義された関数 z=f(x,y) が極小曲面方程式を満たすならば，f は x,y に関する１次式である」という定理を証明した。我々は Bernstein の定理の類似物が，放物型 k-Hessian 方程式と呼ばれる完全非線形偏微分方程式に対して成立するという結果を得た。この結果は熱方程式，放物型 Monge-Ampère 方程式を含む，これまで研究がなされてきた多くの放物型 k-Hessian 方程式に対して適用可能である。得られた研究結果をまとめた論文 2 編がそれぞれ Nonlinear Analysis 誌および Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 誌に掲載された。（中森さおり氏（広島大学）との共同研究）

(3) ある条件を満たす一般の完全非線形楕円型・放物型方程式の粘性解において，1 つの等高面は常に除去可能であるという結果を既に得ているが，この定理の拡張について考察した。得られた研究結果をまとめた論文は投稿準備中である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

1. Saori Nakamori and Kazuhiro Takimoto, Entire solutions to generalized parabolic k-Hessian equations, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics，査読有，176 (2016)，173-190.

2. Saori Nakamori and Kazuhiro Takimoto, A Bernstein type theorem for parabolic k-Hessian equations, Nonlinear Analysis, 査読有, 117 (2015), 211-220.

3. Saori Nakamori and Kazuhiro Takimoto, Uniqueness of boundary blowup solutions to k-curvature equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications，査読有，399 (2013), 496-504.

〔学会発表〕（計１６件）

1. Kazuhiro Takimoto, Entire solutions to generalized parabolic k-Hessian equations, 11th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2016 年 7 月 3 日，オーランド（アメリカ）.

2. 滝本和広，放物型 k-Hessian 方程式に対する Bernstein 型定理（Bernstein type theorems for parabolic k-Hessian equations），偏微分方程式の最大値原理とその周辺，2016 年 3 月 4 日，北海道大

学（北海道札幌市）．

3. Kazuhiro Takimoto, Bernstein type theorem for some types of parabolic Hessian equations, 第33回九州における偏微分方程式研究集会, 2016年1月27日, 九州大学西新プラザ（福岡県福岡市）．

4. Kazuhiro Takimoto, On a Bernstein type theorem for some types of parabolic Hessian equations, RIMS研究集会「偏微分方程式の漸近問題と粘性解」, 2015年12月4日, 京都大学数理解析研究所（京都府京都市）．

5. 滝本和広, Entire solutions to the generalized parabolic k-Hessian equation, 熊本大学応用解析セミナー, 2015年11月7日, 熊本大学（熊本県熊本市）．

6. 滝本和広, Bernstein type theorem for the generalized parabolic k-Hessian equation, 京都大学 NLPDE セミナー, 2015年10月23日, 京都大学（京都府京都市）．

7. 滝本和広, Entire solutions to some types of parabolic Hessian equations, 日本数学会 2015年度秋季総合分科会（函数方程式論分科会特別講演）, 2015年9月15日, 京都産業大学（京都府京都市）．

8. Kazuhiro Takimoto, Entire solution to the generalized parabolic k-Hessian equation, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, 4th Italian-Japanese Workshop, 2015年5月27日, パリヌーロ（イタリア）．

9. 中森さおり, 滝本和広, Bernstein type theorem for the parabolic k-Hessian equation, 日本数学会2015年度年会（函数方程式論分科会）, 2015年3月22日, 明治大学（東京都千代田区）．

10. 滝本和広, Entire solution to the parabolic k-Hessian equation, 南大阪応用数学セミナー, 2015年1月31日, 大阪市立大学（大阪府大阪市）．

11. Kazuhiro Takimoto, Bernstein type theorem for some parabolic Hessian equation, 東北大学非線形偏微分方程式ワークショップ, 2014年11月15日, 東北大学（宮城県仙台市）．

12. 滝本和広, Entire solution to the parabolic k-Hessian equation, 岐阜数理科学セミナー, 2014年10月24日, 岐阜大学（岐阜県岐阜市）．

13. Kazuhiro Takimoto, Bernstein type theorem for some fully nonlinear PDEs, 10th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014年7月7日, マドリッド（スペイン）．

14. 滝本和広, On the dynamics of a quasilinear parabolic problem related to the mean curvature operator, 三大学偏微分方程式セミナー, 2013年11月27日, 日本大学（東京都千代田区）．

15. Kazuhiro Takimoto, The dynamics of a parabolic quasilinear boundary value problem associated to the mean curvature operator, 3rd Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, 2013年9月5日, 東京工業大学（東京都目黒区）．

16. 滝本和広, 偏微分方程式の解の孤立特異点をめぐって, 第11回ランチタイムセミナー, 2013年7月23日, 広島大学（広島県東広島市）．

〔図書〕（計１件）

1. 大下承民, 滝本和広, 中村健一編, 京都大学数理解析研究所, 非線形現象に現れるパターン形成の数理解析, 数理解析研究所講究録1924, 2014年, 114ページ．

６．研究組織

(1)研究代表者

滝本　和広（KAZUHIRO TAKIMOTO）
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：００３６３０４４