

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 1 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400174

研究課題名(和文)非線形分散型方程式に現れるパターンの安定性解析，特に平面孤立波の研究

研究課題名(英文)Stability analysis of patterns in nonlinear dispersive equations

研究代表者

水町 徹 (Mizumachi, Tetsu)

広島大学・理学研究科・教授

研究者番号：60315827

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：空間2次元の長波長近似モデルであるKP-II方程式の単一の線ソリトンの安定性を研究した。1線ソリトンはその進行方向には指数的に減衰する一山のパルスで、進行方向と鉛直な方向には一様な進行波解である。前回の課題で1-line solitonが空間的に指数減衰する摂動に対して安定であることを示したが、線ソリトン解に摂動を加えて生ずる擾乱をline solitonの尾根の周辺にあるものと他の部分に分けて扱うことで、多項式オーダーで減衰する摂動を含むより広いクラスで安定性を証明した。同じく空間2次元の長波長近似モデルであるBenney-Luke方程式の平面孤立波の線形安定性を研究した。

研究成果の概要(英文)：I study stability of 1-line solitons for the KP-II equation and prove their stability for polynomially decaying perturbations. This is an improvement of my former result published in 2015 which shows stability of 1-line solitons for exponentially decaying perturbations. I obtain the result by splitting a small solution of the KP-II equation from the perturbations to line solitons which ensures exponential decay of the rest of the perturbations. I also studied the asymptotic linear stability of planar solitary wave solutions for the Benney-Luke equation which is another 2-dimensional model of long water waves.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：平面孤立波 安定性 線形安定性 レゾナンス

## 1. 研究開始当初の背景

遠浅の海岸には波の進行方向と鉛直な方向に一樣で、形状を変えずに一定速度で進む波（平面進行波）が現れる。KP-II 方程式はこのような水面の運動を記述する長波長近似モデルの一つであり、波の進行方向と鉛直な方向に波が緩やかに変化を考慮に入れて空間1次元の方程式である KdV 方程式を空間2次元の方程式に拡張したモデルである。KP-II 方程式は代表的な平面進行波である線ソリトン解の安定性を議論するために提唱された。KdV 方程式同様に完全可積分であるため、逆散乱の方法を用いて線ソリトンの周囲にある解を解くことが試みられているが、KP-II 方程式の線ソリトン解が空間局所的でないこともあって、その表示公式から解の定性的な性質を導くことは KdV 方程式のソリトン解の周囲にある解の場合に比べて難しく、逆散乱法による数学的に厳密な結果は得られていない。

平面進行波解の安定性は放物型方程式の場合には多くの研究が行われているが、初期の研究を除き、その多くは2階単独の放物型方程式に特有の最大値原理に依拠して、分散型方程式の平面進行波解の研究には別の手法が必要である。

KP-II 方程式の線ソリトン解の周りでの線形化作用素は、空間無限遠方で緩やかに指数増大する関数の族が（形式的には）連続固有関数となっており、対応する連続固有値は0付近にあることが知られていた。実はこれらの指数増大する連続固有関数は、線ソリトン解の周囲の解のダイナミクスにおいて重要な役割を果たすが、関数解析的なアプローチをとる場合には、通常は空間無限遠方で指数増大する形式的な（連続）固有関数を最初から排除して考える。このため、KP-II 方程式の線ソリトンの安定性は物理的に見ても自然な問題であるにも関わらず、長年放置されてきた。2015年に出版された私自身の論文において、線ソリトン解の周囲にある解に含まれるこれらの連続固有モードの時間発展が摂動によって変調する線ソリトンの空間局所的な振幅や位相の時間変化に対応していることが分かり、KP-II 方程式の線ソリトンは空間無限遠方で指数減衰する摂動に対して安定であることが証明された。

## 2. 研究の目的

2015年の論文の骨子は、線ソリトンに加える摂動を空間無限遠方で指数減衰するものに限定し解の挙動を重み付き空間で考察することで、通常ならば連続固有関数として扱われることのない空間無限遠方で指数増大する「レゾナント連続固有関数」のなす部分空間へ KP-II 方程式を射影し、変調する線ソリトンの局所振幅及び局所位相が横断方向の変数を空間変数とする Burgers 方程式系によって記述されることを証明したことであった。雑な言い方をすると、線ソリトンの周囲にある解のダイナミクスは局所振幅

と局所位相を未知関数とする Burgers 方程式に縮約されることを「中心多様体の方法」もどきを使って示した。

その引き換えに、線ソリトンに加える摂動は線ソリトンの進行方向に指数減衰するものに限定せざるを得なかった。また線形化作用素のスペクトルを決定する際に、KP-II 方程式などの完全可積分系方程式に固有のベックルンド変換を用いており、完全可積分系でないモデル方程式の場合には、KP-II 方程式と同様の物理的状況を記述するモデル方程式であっても、平面孤立波解の周りでの線形化作用素が同様のスペクトル構造を持つか明らかではなかった。さらに2015年の論文の方法は、そのままでは複数の線ソリトンが交叉する多重線ソリトンの安定性には適用できない。これらの問題点を解消することが研究の目的であった。

## 3. 研究の方法

KP-II 方程式の場合は、KdV 方程式などの空間1次元の長波長近似モデルと同様に、ソリトンの進行速度が自明解の周りでの線形化方程式の平面波解の群速度よりも速く、微小な波と線ソリトンは時間とともに分離することが期待される。線ソリトンに加えた摂動によって生じる擾乱を KP-II 方程式自身の微小な解と残りの部分にさらに分けると、残りの部分は空間無限遠方で指数減衰するため、2015年のように「中心多様体の方法」もどきを使って証明することを試みた。KP-II 方程式の解を人工的に分けた複数の部分の相互作用は、KP-II 方程式の保存則だけでは制御できないため、Hadac-Herr-Koch による臨界空間における KP-II 方程式の解の非線形散乱の結果を援用することを試みた。

また KP-II 方程式と同様に空間2次元の長波長近似モデルである Benney-Luke 方程式の平面孤立波解のまわりでの線形化作用素のスペクトルを空間無限遠方で指数的に増大する関数を重み関数とする関数空間で調べ、KP-II 方程式の場合と同様に原点付近に「レゾナント連続固有関数」が現れることを検証した。

これらの研究を遂行するにあたって、私が（当時）在籍した大学が主催する九州関数方程式セミナーと広島数理解析セミナーに研究者を招聘し、専門知識の提供をお願いした。

また海外における研究集会でも得られた研究成果の発表を行うと同時に専門知識の収集に努めた。

## 4. 研究成果

長波長近似モデルの孤立波解の漸近安定性をエネルギー空間などの重みのない関数空間で「中心多様体の方法」もどきで証明するために、孤立波解の周りの解を伝播速度の異なる部分ごとに解析するという方法自体は FPU 格子や空間1次元の Benney-Luke 方程式などですでに使われていたが、これらの方

式は KdV 方程式や KP-II 方程式に比べて，解の正則性の観点から見ると常微分方程式に近いものであった．2014 年に Tzvetkov 氏と共同で Pego Weinstein による KdV 方程式に対する重み付き空間における「中心多様体の方法」もどきは， $L^2$  空間でも適用できることを示し，正則性の問題がさらに厄介な KP-II 方程式の場合も，進行方向の積分変数による積分平均が常に 0 となる摂動に対しては，Hadac-Herr-Koch 氏らの非線形散乱の方法を適用することで，線ソリトンが安定になることを示した．その結果，線ソリトンは多項式減衰する摂動に対しても安定であることが分かったものの，線ソリトンから時間とともに遠ざかる擾乱についてはあまり良い評価が得られなかったために，当初計画していた多重線ソリトンの安定性に関する成果は得られなかった．

また完全可積分系でない方程式でも線ソリトンの安定性が証明できるかという問題に関しては，2 次元 Benney-Luke 方程式の場合に研究をし，平面孤立波解のまわりでの線形化作用素は KP-II 方程式と同様に原点付近に「レゾナント連続固有関数」を持つこと，とりわけ平面波解の振幅が小さな場合には，重み付き空間において，線形化作用素を「レゾナント連続固有関数」の族のなす部分空間の補空間で考察すると指数安定であることが示された．さらに「レゾナント連続固有関数」の族の時間発展を調べると，KP-II 方程式の線ソリトンの時に観察された位相のずれに対応したものが現れることが分かった．以上の結果は Benney-Luke 方程式の平面孤立波の非線形安定性を証明する際の重要なステップになると考えらえる．

##### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

1. T. Mizumachi, Stability of line solitons for the KP-II equation in  $R^2$ , II, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics に掲載決定(印刷中), 査読有

2. T. Mizumachi, N. Tzvetkov,  $L^2$ -stability of solitary waves for the KdV equation via Pego and Weinstein's method, Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B49 巻, 2014, 査読有 pp. 33-63.

[学会発表](計 15 件)

1. T. Mizumachi, Asymptotic linear stability of line solitary waves of the Benney-Luke equation, CMS Winter Meeting, 2016/12/02-05, Niagara Fall (カナダ)

2. 水町 徹 Stability of line solitons

for the KP-II equation, Nonlinear Wave and Dispersive Equations, 2016 年 9 月 6 日~8 日, 京都大学

3. T. Mizumachi, Stability of line solitons for the KP-II equation, Nonlinear Waves 2016: May Conference 2017/05/23-27, IHES Bures-sur-Yvette 市 (フランス)

4. T. Mizumachi, Stability of line solitons for the KP-II equation, Workshop 'Singularity formation and long-time behavior in dispersive PDEs', 2016/3/14-18, Bonn (ドイツ)

5. T. Mizumachi, Stability of line solitons for the KP-II equation, 第 33 回九州における偏微分方程式研究集会, 2016 年 1 月 27 日 - 29 日, 九州大学

6. T. Mizumachi, Stability of line solitons for the KP-II equation, 第 2 回 解析学の耳袋, 2015 年 10 月 28 日~30 日, プラサヴェルデ(静岡県沼津市)

7. 水町 徹, On stability of line solitons of the KP-II equation, International Workshop on "Fundamental Problems in Mathematical and Theoretical Physics", 2015 年 9 月 28 日-10 月 3 日, 早稲田大学

8. 水町 徹, On stability of line solitons for the KP-II equation, RIMS 研究集会「流体と気体の数学解析」, 2015 年 7 月 8 日~10 日, 京都大学数理解析研究所

9. 水町 徹, KP-II 方程式の line soliton 解の安定性, 日本数学会秋季総合分科会函数解析学分科会特別講演, 2014 年 9 月 25 日~28 日, 広島大学

10. 水町 徹, Stability of solitary waves via Pego-Weinstein's method, Workshop on Stability of solitary waves, 2014 年 5 月 26 日~30 日, ピサ(イタリア)

11. 水町 徹, Stability of line solitons for the KP-II equation in  $R^2$ , SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations, 2013 年 12 月 7 日~10 日, マイアミ(アメリカ)

12. T. Mizumachi, Stability of line solitons for the KP-II equation in  $R^2$ , Lattice Differential Equations, 2013 年 9 月 15 日~21 日, Oberwolfach (ドイツ)

13. T. Mizumachi, Stability of line solitons for the KP-II equation in  $R^2$ , Nonlinear Waves and Dispersive Equations, 2013 年 8 月 11 日~17 日, Oberwolfach (ド

イツ)

14. 水町 徹, Stability of line solitons for the KP-II equation in  $R^2$ , RIMS 研究会「調和解析と非線形偏微分方程式」2013年7月8日~7月10日, 京都大学数理解析研究所

15. 1. T. Mizumachi, Stability of line solitons for the KP-II equation in  $R^2$ , NSF/CBMS Regional Conference in Mathematical Sciences Solitons in Two-Dimensional Water Waves and Applications to Tsunami, 2013年5月20日~24日, テキサス大学パン・アメリカン校 (アメリカ)

〔図書〕(計1件)

T. Mizumachi, Stability of line solitons for the KP-II equation in  $R^2$ . Mem. Amer. Math. Soc. 238 (2015), no. 1125, vii+95 pp. ISBN:978-1-4704-1424-5;978-1-4704-2613-2

〔その他〕

ホームページ等

<https://arxiv.org/abs/1512.08334>

KP-II 方程式の線ソリトンに関する安定性に関する成果を公開した

(Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics に掲載予定)

<https://arxiv.org/abs/1701.03390>

2次元の Benney-Luke 方程式の平面孤立波解の線形安定性に関する研究成果を公開した。

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

水町 徹 (MIZUMACHI TETSU)  
広島大学・理学研究科・教授

研究者番号：60315827

### (2) 研究分担者

なし ( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

なし ( )

研究者番号：

### (4) 研究協力者

なし ( )