様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 ３１ 日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４００１７８

研究課題名（和文）非線形シュレディンガー方程式の解の挙動に関する解析

研究課題名（英文）On the behavior of solutions to some nonlinear Schrodinger equations

研究代表者
北　直泰（Kita, Naoyasu）

熊本大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：７０３３６０５６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：非線形項に複素係数を含むようなシュレディンガー方程式の初期値問題について、解の挙動を調べた。この方程式によって表わされる現象は、光ファイバー内を伝搬する光（＝電磁波）信号の形状変化である。ファイバーに含まれる不純物の種類によって、①非線形的なエネルギー散逸を伴う場合と、②非線形的な増幅効果を伴う場合がありうる。今回の研究成果として、①の場合に大きな初期データに対して解の一様ノルムの減衰オーダーを特定した。さらに、解のL mルムが時刻の経過に伴っていくらでも小さくなることも示した。また、②の場合に小さな初期データであっても有限時刻で解のL mルムが正の無限大に発散しうることを示した。

研究成果の概要（英文）：I have reserched the asymptotic behaviors and blowing-up phenomena of solutions to the Cauchy problem for some nonlinear Schrodinger equations (NLS) which including complex coefficient in the nonlinearity. This kind of NLS describes shape change of puls - electro-magnetic wave - propagating through optical fibers. it is classified with the two cases - (1)nonlinear energy-dissipation and (2) nonlinear amplification. As results of my reserch supported by this national grant, in case (1), I specified the decay order of the solutions in the uniform norm even though the initial datum are attained without size-restriction. In addition, I could prove that the solutions are gradually minimized in L norm as well. In case (2), the L norm of the solutions blow up in finite time for small initial data.

研究分野：基礎解析

キーワード：非線形シュレディンガー方程式　解の漸近挙動　解の爆発

１．研究開始当初の背景

これまで主に光ファイバー工学で登場する非線形シュレディンガー方程式の初期値問題に関する研究を行ってきた。光ファイバーによって情報を送信する際に，必ずと言ってよいほど首をもたげてくることは「ファイバー内を伝搬する光信号の減衰をいかに防ぐか？」という問題である。

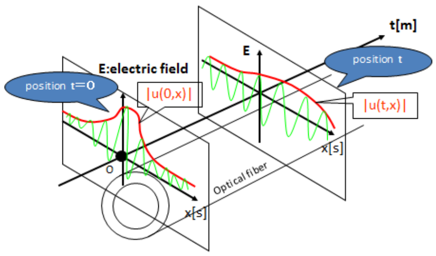

図　光ファイバー内の信号

現在，信号の長距離伝送で実用化されているものは，光信号増幅による送信方法である。信号増幅では送信経路の途中に複数の増幅器を設置している。旧来は各々の増幅器で，減衰した光信号を一旦電気信号に変換し，電気的処理によって増幅，それを再び光信号に戻して送信し直すという工程がとられていた。ところが，近年この方法よりも安価な増幅方法が開発されて実用化に至っている。それが本研究に関わりの深いエルビウム添加型ファイバー増幅（Erbium Doped Fiber Amplification ― 略して EDFA）である。EDFA の原理を簡単に説明する。ファイバーに添加されたエルビウムイオンに特定の振動数をもつレーザー光を照射すると，イオンを取り巻く電子が励起状態になる。そこに光信号による攪乱が送信されると，電子が基底状態に落ちる。そのエネルギーギャップが光子となって光信号を増幅する役割を果たす。

光ファイバーを伝わる信号波形の変化を記述する方程式は非線形シュレディンガー方程式（以下 NLS）である。この方程式に上述した EDFA の効果を取り込むと，非線形項の係数が複素数になる。私の研究目的は，複素係数を有する NLS の解の挙動に関するものである。より詳しく言うと，複素係数の虚部の正負に応じて，①大きな初期データに対して解の減衰評価を得ること，そして②小さな初期データであってもやがて爆発すること，以上の２点を関数解析学的な手法で証明することである。NLS においては未知関数が複素数値であるため，熱方程式のような比較定理が成り立たない。ここに NLS の解析の難しさがある。比較定理に依拠しないで解の爆発を示すために，私は分散型方程式特有の性質に着目している。それは，「ガリレイ変換の生成演算子 $J = x - it\partial$ が方程式の線形作用素部分と交換する」という性質と「NLS の初期値問題では過去に遡って解ける」という性質である。NLS において，エネルギー散逸モデルと EDFA モデルには密接な関わりがある。つまり，エネルギー散逸モデルで大きな初期データに対して解の減衰評価を得ることができれば，未知関数の時刻を反転することによって，EDFA モデルにおいて小さな初期データに対する爆発解を構成できる。したがって，爆発解の構成では，エネルギー散逸モデルにおける解の減衰評価を導くことが重要になる。解の減衰評価については、東京大学の下村明洋氏との共同研究でいくつかの結果を得ている。

２．研究の目的

先に EDFA モデルにおける爆発解の構成には，エネルギー散逸モデルにおける解の減衰評価が重要な役割を果たすことを記述した。しかし，この理論には以下に紹介するように少なくとも５つの方向で進展の余地が残されている。

(1) 非線形項のベキの拡張 … 下村氏との研究成果を適用する方法では，非線形項のベキが３付近という制限をつける必要がある。これは誤差項をうまく評価して強い減衰を導くことから生ずる要請である。本研究の代表者は，誤差項の評価を改良

する手立てとして「truncated L^2 norm」という量を導入すれば，非線形項のベキを大幅に拡張できることに気づいている。ここで，truncated L^2 norm とは積分で与えられる量で，$\int_{|w(t,x)|>\varepsilon} |w(t,x)|^2 dx$ のように関数の値が小さい部分を除外した 2 乗積分量である。

(2) 解の減衰オーダーの特定 … 現在のところ、truncated L^2 norm を介してエネルギー散逸モデルの解が減衰することを定性的なレベルで示すところまで出来たのだが，減衰オーダーを特定するレベルにまで至っていない。そこで，truncated L^2 norm による評価をより洗練し，解の減衰オーダーの特定を試みたい。

(3) 任意初期データでの解の爆発 … EDFA モデルについて私が現段階で得ている事柄は，爆発解の「存在」までである。これは任意の（小さな）初期データに対して必ず解が爆発することを意味していない。非線形熱方程式の場合には比較定理を用いて任意の初期データに対して解の爆発を示すことは可能である。しかし，比較定理を期待できない EDFA モデルで解の爆発が一般に起こるかどうかは未解決なので研究する必要がある。

(4) 高次元モデルへの拡張 … 光ファイバーモデルを扱う場合には,時空 1＋1 次元の NLS を考えることが多い。しかし，数学的な興味からモデルを高次元化して解の減衰や爆発を導出できるかどうかを調べてみたい。特に，エネルギー散逸モデルで大きな初期データに対して解の減衰を導き出すには，重み付き L^2 norm のアプリオリ評価が必要である。その際に空間次元の制約を受けるので，一般に高次元の問題は難しい。

(5) 非線形項の係数の条件緩和 … 現在のところ，非線形項に含まれる係数の虚部が十分大きい時に EDFA モデルの爆発解の存在を示すことができている。この制約は数学的な理論構築の際に計算上便利になるものであるが，物理的には極めて不自然な条件である。係数に対するこの不自然な制約を外して爆発解の存在を証明できないであろうか。

３．研究の方法

主に国内外で関連性の高い研究をしている研究者と意見を交換することが研究遂行の方法になっている。解の減衰評価について考察するときには, 主に Hayashi, Kaikina, Naumkin, Katayama, Sunagawa らによる研究成果と手法を参考にしている。ただし，本研究成果で用いられている truncated L^2 norm と爆発解の存在については，本研究代表者が個人的に編み出すことができたものである。これらの方法を編み出せたときには, Hayashi 先生，Katayama 先生，Sunagawa 氏が出席しているセミナーや研究集会にて成果を発表し，感想や意見を仰いだ。また, 2013 年には Kaikina 先生と Naumkin 先生が在籍していらっしゃるメキシコの UNAM 大学まで出張し，セミナーにて両先生の感想と意見を仰いだ。

４．研究成果

(1) 非線形エネルギー散逸が非線形 Kerr 効果よりもある程度大きい場合に，NLS の解が L^2 ノルムの意味で減衰する評価を導いた。ただし，初期データは重み付き Sobolev 空間 H^{1,0}∩H^{0,1} に属し，大きさに制限は与えないものとする。既知の結果として, Kita-Shimomura によるものがあるが，そこでは非線形項の次数 p に 2.68… ＜ p ≦3 という制約がついている。今回の結果では，この制約を取り払って，より一般的に 1＜p ≦ 3 の範囲で解の L^2 ノルムが減衰することを証明できた。その際に，重要な役割

を果たしたものは，「truncated L^2 norm」である。Kita-Shimomura の共著論文でこの道具を知らずに解の減衰を求めた時には，未知関数を変数変換する過程で誤差項に時間的に増大する因子を掛けて評価を進めていた。言わば，誤差項を悪く評価していたのである。それ故，非線形項の次数 p をあまり下げることができなかったのである。しかし，今回編み出された truncated L^2 norm を使用すると，誤差項に増大する因子を掛けないこととほぼ同等の評価を行うことが可能になる。そのお陰で，非線形項の次数 p を 1 付近まで下げることができたのである。

(2) 非線形増幅が非線形 Kerr 効果よりもある程度大きい場合に，NLS の解が有限時刻で爆発すること（L^2 ノルムが正の無限大に発散すること）を示すことができた。ただし，初期データの L^2 ノルムがどんなに小さな正の値であっても，爆発解が存在しうるという主張である。その証明方法については以下のとおり。①まず，NLS からラプラシアンの項を取り除いた本質的に常微分方程式を考える。この常微分方程式 (ODE) は初等関数を用いて容易に解くことができ，その解は有限時刻で正の無限大に発散するような形をしている。この解を「爆発のプロファイル」と呼ぶことにする。これは，分散効果を表すラプラシアンを取り除いて，非線形増幅の効果のみを考えた方程式を解いているのであるから，さほど不思議なことではない。②次に，爆発のプロファイルに摂動をつけて，元の NLS の解を構成する。ただし，爆発時刻において，この摂動は 0 という値をとるものとする。さらに，爆発時刻付近で過去に向かって NLS の解を求めることにする。ここで注意すべきことは，摂動の構成の際に，通常よく使われる積分方程式を縮小写像の原理で解くことができないということである。なぜなら，摂動が満たすべき偏微分方程式には，非線形項に強い特異性を持つ変数係数が含まれているからである。この困難を乗り越えるために，「エネルギー法」を用いて爆発時刻付近で摂動の局所解を構成する。③最後に，爆発時刻付近で構成された NLS の解を“過去に向かって”延長する。このときに，エネルギー散逸を伴うシュレディンガー方程式の大域解の存在定理, およびその L^2 ノルムが減衰する結果を利用する。注意すべきことは，非線形増幅効果は，過去に向かって解を構成する際に非線形エネルギー散逸の役割を果たすということである。こうして，爆発時刻付近で構成された解は過去に向かってどんどん延長され，その L^2 ノルムはどんどん小さくなる。ある程度 L^2 ノルムが小さくなったときに，そのデータを初期値とみなすことにする。すると，ここから未来に向かって元来た道を引き返していけば，これが小さな初期データに対する NLS の爆発解になっている。

(3) 非線形エネルギー散逸を伴う NLS について，解の一様ノルムの減衰評価を導くことができた。ただし，非線形エネルギー散逸が非線形 Kerr 効果に比して弱い状況下でこの問題に取り組んだ。また，初期データについては，重み付きの Sobolev 空間の意味で十分に小さいものを考える。Kita-Shimomura の共著論文でも似たような結果を得ていたが，その仮定として非線形項の次数 p が $3-\varepsilon < p \leqq 3$ という制約を課していた。これでは，p がどの程度まで下がるのか判然としない。そこで，今回の研究では，証明がうまくいくための p の下限を陽的に

特定することに成功した。この研究は中村能久氏（熊本大学）との共同研究である。成果として，2.68…＜p≦3 のとき，非線形エネルギー散逸と非線形 Kerr 効果にある制約を与えると，解の一様ノルムが－1/(p－1) の指数オーダーで減衰するという結果を得ることができた。証明のアイデアは，Klainerman によって編み出されたベクトル場の方法（作用素 J = x － it∂ を用いた評価）を精密に遂行するところにある。

複素係数をもつ NLS の解析には，まだまだ大仰な仮定を課して証明を遂行している部分が見受けられる。これらの仮定を緩めて，物理的に自然な条件下で解の挙動を見極めることが今後の課題になるであろう。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

① N.Kita, “Nonlinear Schrödinger equations with δ-functions as initial data”, Sugaku Expositions 27 (2014), no.2, pp223－241.査読付

② N.Kita and Y.Nakamura, “Decay estimate and asymptotic behavior of small solutions to Schrödinger equations with subcritical dissipative nonlinearity”, to appear in proceeding of “Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations”.査読付

〔学会発表〕（計　1　件）

N.Kita, “Nonlinear Schrödinger equations describing energy dissipation and amplification”, Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations (at Osaka University), 2014 年 9 月.

６．研究組織
(1)研究代表者

北　直泰（KITA, Naoyasu）
熊本大学大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：70336056