

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 14 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400179

研究課題名(和文) 磁場中の波動伝播問題の漸近解析と散乱逆問題

研究課題名(英文) Asymptotic analysis and inverse scattering of wave propagation problems in magnetic fields

研究代表者

望月 清 (mochizuki, kiyoshi)

首都大学東京・理工学研究科・名誉教授

研究者番号：80026773

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究はシュレディンガー方程式等分散型方程式に関する様々の数値モデルを研究対象にした。中心課題を磁場中の、特に低次元の波動伝播現象の解析に置き、2次元外部領域での磁場付きシュレディンガー作用素の一般的なレゾルベント評価を得るのに成功した。これは逆問題を含む散乱理論の発展に寄与するものである。また、磁場を伴う外部領域でのクライン-ゴルドン方程式に対して、平滑化効果、ストリッカ評価の確立が期待される。1次元の散乱の逆問題では、種々の星型無限グラフ上での散乱行列からポテンシャルを同定す問題に一定の回答を得た。ここからは、一つのループから有限個の半直線状のレイが伸びている問題に研究を集中していく。

研究成果の概要(英文)：In this project we are concerned with various wave propagation phenomena of dispersive evolution equations including the Schro"dinger equations. The central object is in the uniform resolvent estimates for the magnetic Schro"dinger operators in exterior domain. Two dimensional problems is successfully solved, and we can now expect to develop several scattering problems of all dimensions. Especially, smoothing and Strichartz estimates are to be established to magnetic Klei-Gordon equations in exterior domain.

As for the one dimensional operators, the inverse problem to determine the potential from the scattering matrix is studied on several kind of unbounded star graphs. Coming study is concentrated to the graph which consists of a roop attached by several infinite rays.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：磁場中のシュレディンガー作用素 レゾルベントの一般評価 平滑化効果 散乱理論 散乱n逆問題

1. 研究開始当初の背景

本研究の対象は物理学の基礎方程式であり、そのスペクトル・散乱問題には、長い歴史と豊富な結果が蓄積されている。しかし、磁場を伴った境界値問題に対して、その重要性にも関わらず、満足できる結果が得られているとは言えない。特に空間2次元の場合に未解決の部分が多い。この問題の解決は筆者が長年考察を続け、夢見ていたもので、大きな前進が期待される時が到来したのかも知れない。

グラフ上の散乱逆問題に関してはループを含む無限グラフが応用上重要であるにも関わらず、日本では研究が進んでいない。星型グラフに対する筆者達の研究の積み重ねを基に一步先に進みたい。

2. 研究の目的

磁場を伴う Schro" dinger 作用素の外部境界値問題に対して、一様レゾルベント評価、平滑化効果、Strichartz 評価を研究の中心に据え、派生するレゾナンスの影響とその解消、散乱の逆問題、特に再構成の問題に取り組む。空間3次元以上の場合、特にレゾルベント評価に関して前研究で一定の解決を見、2次元の場合が未解決のまま残されていた。本研究の中心課題といえる。この問題に解答が得られれば、high frequency だけでなく、low frequency に対する散乱振幅の構成と挙動の評価が可能になり、それを通して逆問題の進展が期待できる。更に、研究対象を Klein-Gordon 方程式、音響波動方程式に広げ、統一的な理論に発展させることが可能になる。

Strichartz 評価は非線形の発展方程式の研究にとって基本的な道具であり、この研究でも時間が許せば、外部領域での非線形分散型方程式の散乱問題に取り組む。

一方、グラフ上の1次元 Schro" dinger 作用素に関しては、星型グラフに関する結果を整理して発展させる。ループに複数の半無限 ray が接続している太陽型グラフ上で Marchenko 方程式を解くことにより、逆問題の再構成定理の確立が期待される。グラフ上の量子力学は回路基板に沿った微粒子の量子論的運動を説明するだけでなく、ナノテクノロジーや量子コンピュータの回路設計などに応用され、特にループを伴うグラフ上の散乱問題の重要性が増している。

3. 研究の方法

発表された論文を検討し、著者と直接コンタクトを取ったりして研究を進めるが、研究の進展は、そのきっかけを、セミナーや研究会で広く関連分野の進展を見、討論を重ねるところからもたらされることが多い。ただし、研究の進捗には、これらを基にした深い、集中した、個人での考察が決定的に重要であることは言うまでもない。

その意味で、主催する3大学偏微分方程式セ

ミナーを大切にし、そこを中心として、いくつかの研究集会を組織する。幸い、セミナーに代表者の元学生や力のある中堅の研究者が参加しており、彼等との日常的な議論が深まることを期待している。

4. 研究成果

2次元 Schro" dinger 作用素に関しては論文 (1), (2) を発表した。定常問題の解にかかわるエネルギー積分 (quadratic functional identity) の処理が課題であるが、3次元以上の場合にはコアになる部分の定値性が明確で、それを用いた解の重み付き評価がある程度容易にできる。しかし、2次元の場合、コアの部分の定値性が見えず、肝心の解の重み付き評価ができていなかった。Pisa での研究発表を通してこの部分に加えられた解析の正当性が保証され、結果が論文 (2) となった。そこには、レゾルベント評価から導かれる発展方程式の平滑化効果を、関連する Klein-Gordon 方程式、音響波動方程式などの場合を含めて、示している。

重み付きの解の評価は放射条件を定める関数を用いて評価されるのであるが、これは Hardy の不等式と一見よく似ている。Hardy の不等式は2次元の全空間では成立せず、外部または内部領域に積分を制限する必要がある。この問題の場合もそうであって、ここでは外部領域に問題を制限した。全平面な場合は Fourier 変換の方法があるが、磁場の存在がそれを妨げている。3年前の報告でも注意したが、磁場に課す条件は磁場ポテンシャルの有界性を仮定するものでなく、一般に磁場そのものは short-range にならないことに注意したい。

論文 (3), (4), (5) ではグラフ上の散乱理論を研究した。ひとつの頂点に有限個の半直線と有限線分からなる ray が集まっている (星型グラフ) ものとし、その上で Schro" dinger 作用素のスペクトル・散乱問題を考える。

論文 (4) ではまず固有値の表れ方を完全に分類し、原点にレゾナンスが表れるときの表れ方の分類も行った。これらはレゾルベント核の singularity の分類として行われるのであるが、有限線分の存在が問題を複雑にしており、連続スペクトルに交じる可算無限個の固有値が表れることになる。それらの影響を排除して、半直線群上での作用素のスペクトル表現を求め、それを基に散乱行列を構成し、変換作用素の満たすべき積分方程式 (Marchenko 方程式) を導く。この一意可解性がポテンシャルの一意存在、再構成を保証する。論文 (4) では再構成を具体的に得るところまでは到達できなかったが、逆問題の一意性を示すことに成功している。

散乱理論は本来、時間を +、- 無限大にとばしたときの自由な発展系とポテンシャルによる摂動を受けた発展系の解とを比較する

理論で、散乱作用素は本来、時間に依って定義される作用素の極限として与えられる。論文(3)では定常的に構成した散乱行列が時間極限として定義されるいわゆる Mo/ller の散乱作用素の積分核に一致することを示している。そのためにレゾルベントの表現と Stone の公式から作用素のスペクトル表現を求める必要がある。それは(4)でも得られているが Stone の公式との関連に不完全な部分があった。(3)ではそこをただし、本来の散乱理論の中に定常的な散乱行列を位置づけることに成功した。(5)は(4)を丁寧に解説したものである。

論文(6)はレゾルベント評価と散乱理論に関する総合報告で、強い特異性を伴うポテンシャルに対する作用素の自己共役性、一般固有関数の増大度の精密な評価などを磁場付きの Shro" dinger 作用素に対して求め、散乱問題に応用している。逆問題では、固定された Frequency に対する散乱振幅からポテンシャルを再構成する Faddeev の方法が dissipation を伴う波動方程式に対しても有効であることが示されている。さらに、Shro" dinger 発展作用素に対する平滑化効果が Klein-Gordon 方程式や音響波動方程式にどのように適用されるかを議論している。ここでは問題を3次元以上に限って解説しているが、(2)の結果を用いれば多くの結果が2次元以上の問題に拡張される。現在、これらを精査して論文にまとめているところである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

- (1) 望月 清, 中澤 秀夫, Uniform resolvent estimates for Helmholtz equations in 2D exterior domain and their applications, 数理解析研究所講究録, 査読なし, 1962, 68-76, 2015
- (2) 望月 清, 中澤 秀夫, Uniform resolvent estimates for magnetic Shro" dinger operators in 2D exterior domain and their applications to related evolution equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読あり, 51-2, 319-336, 2015.
- (3) 望月 清, イゴル トルシン, A stationary approach to the scattering on noncompact star-shaped graphs with some non-trivial compact parts, Current Trends in Analysis and its applications, Birkha" user, 査読あり, 253-263, 2015
- (4) 望月 清, イゴル トルシン, Spectral problems and scattering on noncompact star-shaped graphs containing finite

rays, Inverse and Ill-posed Problems, 査読あり, 23-1, 23-40, 2015.

- (5) 望月 清, Spectral representations and scattering for Schro" dinger operators on non-compact star graphs, Seminar Notes Math. Sci., 査読なし, 14, 28-37, 2013
- (6) 望月 清, Resolvent estimates and scattering problems for Scxhro" dinger, Klein-Gordon and wave equations, Progress in PartialDifferential Equations, Springer, 査読あり, 44, 201-221, 2013.

[学会発表](計12件)

1. 望月 清, 村井 宗二郎, 時間に依存する摂動項をもつ Klein-Gordon 方程式の外部領域における平滑化効果と散乱理論, 2016. 3. 19, 日本数学会(筑波大、茨城県つくば市)
2. (招待講演) 望月 清, 外部領域における磁場付き Klein - Gordon 方程式の解の漸近挙動, 2015.11.28, 北九州での偏微分方程式研究会(小倉リーセントホテル、北九州市小倉区)
3. 望月 清, 一般固有関数の増大度評価 - どの程度のポテンシャルをカバー出来るか-, 2015.4.20, 三大学偏微分方程式セミナー(中央大、東京都文京区)
4. 望月 清, 村井宗次郎, 外部領域における波動方程式の平滑化効果と Schtrichartz 評価, 2015.3.21, 日本数学会(明治大、東京都文京区千代田区)
5. (招待講演) 望月 清, 放射条件とレゾルベント評価, 2014.11.29, 北九州での偏微分方程式研究集会(小倉リーセントホテル、北九州市小倉区)
6. (招待講演) 望月 清, A stationary approach to the scattering on noncompact star-shaped graphs containing finite rays, 2015.9.11-12, 数理研短期共同研究(京都市左京区)
7. (招待講演) 望月 清, Resolvent estimates and space-time estimates for the wave equations, 2014.7.9, 10th AIMS Conference (Madrid, Spain)
8. 望月 清, 中澤 秀夫, 2次元外部領域における磁場付き Shro" dinger 作用素に対する一様レゾルベント評価, 2014. 3. 15, 日本数学会(学習院大、東京都豊島区)
9. (招待講演) 望月 清, Resolvent estimates and scattering problems for magnetic Schro" dinger operators in 2D exterior domain, 2014.2.20, 偏微分方程式姫路研究集会(イーグル姫路、兵庫県姫路市)
10. (招待講演) 望月 清, 磁場中の2次元 Schro" dinger 作用素のレゾルベントの一様評価, 2013.11.30, 北九州での偏微分方程式研究集会(小倉リーセントホテル、北九州

市小倉区)

11. (招待講演) 望月 清, イゴル トルシ
ン, Spectral and scattering problems on
star shaped graphs with non-trivial
compact parts, 2013.8.9, 9th ISAAK Congress
in Kurakow (Kurakow, Poland)

12. (招待講演) 望月 清, On uniform
resolvent estimates for 2-dimensional
magnetic Schro" dinger operators,
2013.8.2, Conference of PDE in Pisa (Pisa,
Italy)

[図書](計 件)

[産業財産権]

出願状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

[その他]

[3大学偏微分方程式セミナーの主催]

中央大学、日本大学、国土館大学のそれぞ
れの理工学部持ち回りのセミナーを開催し、
私の元学生や3大学の研究者などの研究発
表を行っている。月1回のペースではあ
るが、それ以外に年何度かは内外の研究者
を招いて興味深い研究発表をお願いしてい
る。私の研究の中心をここに置くとともに、
このセミナーを若手研究者の育成、自立に
も役立てている。

[研究集会の主催]

1. 松本閉作用素論研究会,
2015.11.20-22, 東横イン松本(長野県
松本市), 5講演、
参加者13名、
2. 武蔵野偏微分方程式研究会、
2015.10.10-12, 日本医大武蔵野校舎
(東京都武蔵野市)、12講演、参加者
35名
3. 釧路偏微分方程式研究会(北海道釧路
市) 2014.10.10-12, 14講演、参加者
33名
4. 松本閉作用素論研究会、
2014.3.22-23, 東横イン松本(長野県松

本市) 4講演、参加者12名

5. 大宰府偏微分方程式研究集会(福岡圏大
宰府市) 2013.10.12-14, 13講演、参
加者36名

6. 研究組織

(1)研究代表者

望月 清(首都大学東京・理工学研究科・
名誉教授)

Kiyoshi Mochizuki(Professor
emeritus, Tokyo Metropolitan University)

研究者番号: 80026773

(2)研究分担者

なし

研究者番号:

(3)連携研究者

なし

研究者番号: