

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 13 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400180

研究課題名(和文) 変分問題、最適化問題と非線形偏微分方程式の研究

研究課題名(英文) Study on variational problems, optimization problems and nonlinear partial differential equations

研究代表者

倉田 和浩 (KURATA, Kazuhiro)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：10186489

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：量子物理現象や数理生態学におけるパターン形成の数理モデル等に現れる非線形変分問題および非線形楕円型偏微分方程式の解の構造を中心に研究推進を行った。

特に、細い領域上での混合境界条件下でのラプラシアン固有値の精密な漸近挙動の研究およびBose-Einstein凝縮現象に付随する非線形変分問題の最小エネルギーに関する粒子数無限大での漸近挙動の研究を行った。

また、3種のFitzHugh-Nagumo型数理モデルに付随する変分問題のエネルギー最小解の解析、交差拡散効果をもつPrey-Predator数理モデル等に現れる非線形反応・拡散系に対して、非定数定常解の存在・非存在パラメータ領域の解析を行った。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied the structure of solutions of nonlinear elliptic partial differential equations arising in mathematical models of quantum phenomena and pattern formation problems of the mathematical biology. Especially, we investigated the precise asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian with the mixed boundary condition on a thin domain and the precise asymptotic behavior of the least energy of a nonlinear variational problem associated with the Bose-Einstein condensation. We also studied the structure of global minimizers for 3-component FitzHugh-Nagumo system and the parameter range of existence and non-existence of non-constant steady patterns for several nonlinear reaction-diffusion systems, e.g., the prey-predator model with a cross-diffusion effect.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：変分問題 最適化問題 固有値問題 非線形楕円型偏微分方程式 パターン形成

1. 研究開始当初の背景

(1) 数理生態学における数理モデルに対するパターン形成の数理科学的研究は、国内外ともに極めて活発に行われており、単純に見える数理モデルにおいてさえ、多様な数学的構造を内包していることが多く、魅力的な研究分野となっている。そうした中で、研究代表者は、特に個体数が小さいときには固体増殖率がロジスチック法則におけるように一定ではなく個体数に比例するというアリ効果を考慮した増殖モデルにおいて、研究代表者は連携研究者の田中らと空間1次元で適当な環境効果のもとでは多様な安定定常パターンが存在することを見つけた。また、ヒドラの形態形成の数理モデルとして有名なギーラー・マインハルト系の数学的研究は国内外でも活発であるが、研究代表者らは特に弱い飽和効果を取り入れたモデルに注目し、空間多次元の軸対称領域において多重スパイク状の定常解の構成を森本光太郎（鎌倉女子大）と行い、その方法論の利点を生かし、走化性現象を記述するあるケモタキسس系モデルなどの多重スパイク状の定常解の構成へと研究を進展させた。また、数理生理学の神経細胞のパルスの伝搬を記述する数理モデルや物質の相分離現象モデルとしてフィッツフー・南雲モデルがある。このモデルは変分構造を持ち、付随するエネルギー汎関数を最小にする状態に対応する定常パターン解が存在するが、拡散係数が小さいとき2つの安定状態を激しく振動する微細構造を持つことが知られている。

(2) 細い領域上でのラプラシアン固有値問題は興味深い変分問題の1つであるが、連携研究者の神保秀一（北海道大学）の協力のもとで、Dirichlet-Neumann型の混合境界条件の下での固有値の漸近挙動（幅をゼロにする極限状況を考える）を研究しており、この研究は量子力学で細い領域に閉じ込められた量子力学的粒子の束縛状態の存在問題

(Quantum Wave Guide Problem)と深く関係することがわかっており、さらなる進展が期待できる。

(3) 非線形光学やBose-Einstein凝縮現象などに現れる非線形変分問題および付随した非線形シュレディンガー方程式の解の凝縮現象の研究は国内外で極めて盛んに研究されている状況であり、近年、多成分系の研究も活発になっている。トラップポテンシャルや場所に応じて変わる散乱長を持つようなモデルにおいて、エネルギー最小解の凝縮点の位置を決定することは興味深い研究テーマとなっている。

2. 研究の目的

偏微分方程式は自然現象、生命現象の数理モデルとして、あるいは幾何学的対象を解析的に研究する際に広く現れる。特に、さまざまな非線形現象の記述に現れる非線形偏微分方程式は多岐にわたり、個々の非線形偏微分方程式の解の構造を解明することで、対応する非線形現象の数学的な知見を深めることは重要である。本研究の全体的構想としては、そうした個々の興味深い非線形現象を記述する非線形偏微分方程式の解の構造を数学的に解明して現象のより深い理解を獲得することを目指し、特に環境効果の解の構造への影響、定常パターン形成問題、固有値最適化問題などに重点を置いて、偏微分方程式論、変分法やスペクトル解析などを用いた現象の数学解析を進めることを目的とする。

3. 研究の方法

調和解析、変分法、スペクトル解析、偏微分方程式、数値解析、数値シミュレーションなどのさまざまな観点から、偏微分方程式の解の構造の研究、固有値問題や非線形楕円型境界値問題等における最適化問題、数理生態学におけるパターン形成と環境効果との関係、反応拡散方程式系の定常解の構造の研究、また物理における超伝導現象や相分離現象に現れるさまざまな非線形楕円型偏微分方程式の解の構造の研究をいくつかの項目に重点をおき行う。研究代表者は、個々の重点項目において、連携研究者の協力を適宜得て、変分問題、最適化問題、偏微分方程式の研究

の統括を行う。連携研究者の神保には固有値問題および超伝導現象に関連した変分問題、田中には変分法および特異摂動問題、柴田(徹)には非線形固有値問題および漸近解析、柴田(将)には非線形シュレディンガー方程式に関する助言・協力を得ながら研究を行う。

4. 研究成果

(1) 研究代表者の倉田和浩は、連携研究者や本学大学院生らと以下の研究を行った。

連携研究者の神保秀一氏(北大)との共同研究で、細い領域上での Dirichlet-Neumann 混合境界条件下でのラプラシアン固有値の精密な漸近展開とその非線形問題への応用に関する研究成果をまとめた論文が Indiana Univ. Math. J. に掲載が決定した。

パターン形成の数理をテーマとした研究を行い、平成 25 年度には、5 種のギラー・マインハルト系の飽和効果をもつモデルに対して、シャドウ系を含め、解のアプリオリ評価および飽和効果が大きい場合の非定数定常解の非存在パラメータ領域の研究を行った。また、アリ効果をもつ 2 種の Mimura-Murray の数理モデルの食物連鎖型の 3 種拡張数理モデルに対して、その非定数定常解の非存在および存在パラメータ領域の研究を行った。さらに、化学反応に現れる Lengyel-Epstein 数理モデルにおいて、協同現象効果をもつ一般の Hill 係数の Turing パターン形成に果たす役割を調べ、解のアプリオリ評価、非定数定常解の非存在定理、非定数定常解の存在定理などの研究をおこなった。平成 26 年度には、SIS 型感染症の伝播数理モデルのエンデミック定常解の構造の研究や Prey-Predator 型の交差拡散数理モデルおよびそのシャドウ系の定常解の構造の解析を大学院生とともにを行い、正值解のアプリオリ評価、非定数定常解の存在・非存在定理、解の漸近的プロファイル等に関して、一定の成果を得ることができた。

平成 25 年度には、量子現象の 1 つでもあるボーズ・アインシュタイン凝縮に関連した変分問題を研究し、簡単な数理モデルではあるが空間の場所によって散乱長が変化するような場合についての最小エネルギーの粒子数無限大での詳細な漸近挙動に関する評価を得ることに成功した。平成 27 年度には、本学大学院生の梶原亮氏との共同研究で、3 種の FitzHugh-Nagumo 型の反応拡散方程式およびそのシャドウ系に現れる変分問題のエネルギー最小解の安定性や精密なエネルギー評価に関する研究を推進し、その成果を論文にまとめ、現在投稿中である。

(2) 連携研究者の神保秀一は、主に以下の研究を行った。

正則および特異的な領域変形を施した際に起こる偏微分方程式の解やその特徴となる性質や量の摂動を研究した(ラメ作用素、ストークス作用素、等のスペクトル摂動問

題)。

グラフ上の単独反応拡散方程式の時間全域解の存在および特徴を研究した。

FitzHugh-Nagumo 方程式および保存型反応拡散方程式の定常解の線型化固有値問題について、定常解と同一の停留点をもつ汎関数を導入し変分構造から固有値構造を特徴付けた。

(3) 連携研究者の田中和永は、主に以下の研究を行った。

非線形シュレディンガー方程式に対する定在波の存在問題等に代表される非線形楕円型方程式に対する特異摂動問題の研究を中心に行った。従来の Lyapunov-Schmidt 法によるアプローチでは極限問題に対して正值解の一意性、非退化性が要求され、適用範囲は典型的な冪状の非線形性等に限られていた。ここでは局所的な変分法によるアプローチを見だし、さらにポテンシャルの不安定特異点に凝集するピーク解(さらには一点に多数のピークが凝集する clustering solution)の存在証明に成功した。さらにその手法の応用として摂動された円環状領域での正值解の多重性等も見いだした。

変分構造をもたない非線形楕円型問題に対しても分岐構造を見いだす等の研究を行った。

(4) 連携研究者の柴田徹太郎は、分岐問題および逆分岐問題を中心に研究を進めた。

非線形楕円方程式の分岐問題は、様々な現象を記述する方程式に現れる重要な研究対象であり、つねに活発に研究されている。分岐曲線の解析は、主として L^{∞} -空間の枠組みで考察されており、特に ODE においては Time map のアイデアがその解析に重要な役割を果たす。ここではいくつかの具体的な方程式に対して、分岐曲線の全域解析に成功した。

逆分岐問題とは、分岐曲線の特徴から未知の非線形項を決定する問題であるが、非線形楕円型方程式の逆分岐問題の研究は非常に少ない。その理由は、順問題の解析ですら、時として非常に困難をとともうからである。そこでこの研究成果に基づき、分岐曲線の大域的挙動から未知の非線形項を決定するという斬新な研究の方向を提唱し、今後の研究の発展につながるいくつかの基本的結果を得た。

(5) 連携研究者の柴田将敬は、主に以下の研究を行った。

準線形シュレディンガー方程式の ground state について研究し、漸近挙動、解の一意性、非退化性についての結果を得て、研究論文として出版済みである。さらに、一意性については、それまで必要だったパラメータに関する制限をはずすという非常に一般的な結果を得た。これは研究論文にまとめ、現在

投稿中である。これらは、足達慎二氏（静岡大学）、渡辺達也氏（京都産業大学）との共同研究である。

一般的な非線形項をもつ、半線形シュレディンガー方程式の定在波解について研究を行い、安定な定在波解が存在するための条件を考察した。その結果は、研究論文として出版済みである。

半線形シュレディンガー方程式の正值解の存在について、非線形項に関する条件を弱めることが出来た。これは研究論文として出版済みである。これは佐藤洋平氏（埼玉大学）との共同研究である。

Sobolev の埋め込み定理の臨界条件に対応する項を持つような Kirchhoff 型方程式の正值解の存在に関する結果を得、研究論文にまとめ現在投稿中である。これは内免大輔氏（室蘭工業大学）との共同研究である。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 28 件)

S. Jimbo and K. Kurata,

Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian on a thin domain under the mixed boundary condition, To appear in Indiana Univ. Math. J. vol.65, issue 3, 2016. (査読有)

<http://www.iuj.indiana.edu/IUMJ/nextissue.php>

S. Jimbo, E. Ushikoshi, Hadamard variational formula for the eigenvalue of the Stokes equations with the Dirichlet boundary conditions, Far East J. Math. Sci. 98 (2015), 713-739. (査読有)

S. Jimbo, Eigenvalues of the Laplacian in a domain with a thin tubular hole, J. Elliptic, Parabolic, Equations 1 (2015), 137-174. (査読有)

C.N.Chen, S. Jimbo, Y. Morita, Spectral comparison and gradient-like property in the FitzHugh-Nagumo type Equations, Nonlinearity 28 (2015), 1003-1016. (査読有)

S. Cingolani, L. Jeanjean, K. Tanaka, Multiplicity of positive solutions of nonlinear Schrödinger equations concentrating at a potential well, Calc. Var. Partial Differential Equations 53 (2015), no. 1-2, 413--439. (査読有)
DOI 10.1007/s00526-014-0754-5

D. Arcoya, C. De Coster, Colette, L. Jeanjean, K. Tanaka, Continuum of solutions for an elliptic problem with critical growth in the gradient. J. Funct. Anal. 268 (2015), no. 8, 2298--2335.
DOI 10.1016/j.jfa.2015.01.014 (査読有)

T. Shibata, Asymptotic behavior of the bifurcation diagrams for semilinear problems with application to inverse bifurcation problems. Int. J. Differ. Equ. 2015, Art. ID 138629, 11 pp. (査読有)

D. Arcoya, C. De Coster, L. Jeanjean, K. Tanaka, Remarks on the uniqueness for quasilinear elliptic equations with quadratic growth conditions. J. Math. Anal. Appl. 420 (2014), no. 1, 772--780. (査読有)

C.-N.Chen, K. Tanaka, A variational approach for standing waves of FitzHugh-Nagumo type systems. J. Differential Equations 257 (2014), no. 1, 109--144. (査読有)

J. Byeon, K. Tanaka, Multi-bump positive solutions for a nonlinear elliptic problem in expanding tubular domains. Calc. Var. Partial Differential Equations 50 (2014), no. 1-2, 365--397. (査読有)

J. Byeon, K. Tanaka, Semiclassical standing waves with clustering peaks for nonlinear Schrödinger equations. Mem. Amer. Math. Soc. 229 (2014), no. 1076, viii+89 pp. (査読有)

T. Shibata, Inverse bifurcation problems for diffusive logistic equation of population dynamics. J. Math. Anal. Appl. 413 (2014), no. 1, 495--501. (査読有)

T. Shibata, TS-shaped bifurcation curves for nonlinear two-parameter problems. Nonlinear Anal. 95 (2014), 796--808. (査読有)

S. Adachi, M. Shibata, T. Watanabe, Asymptotic behavior of positive solutions for a class of quasilinear elliptic equations in \mathbb{R}^2 . Funkcial. Ekvac. 57 (2014), no. 2, 297--317. (査読有)
DOI: 10.1619/fesi.57.297

Y. Sato, M. Shibata, Existence of a positive solution for nonlinear Schrödinger equations with general nonlinearity. Adv. Nonlinear Anal. 3 (2014), suppl. 1, s55--s67. (査読有)
DOI: 10.1515/anona-2014-0003

M. Shibata, Stable standing waves of nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinear term. Manuscripta Math. 143 (2014), no. 1-2, 221--237. (査読有)
DOI: 10.1007/s00229-013-0627-9

S. Adachi, M. Shibata, T. Watanabe, Blow-up phenomena and asymptotic profiles of ground states of quasilinear elliptic equations with H^1 -supercritical nonlinearities. J. Differential Equations 256 (2014), no. 4, 1492--1514. (査読有)
DOI: 10.1016/j.jde.2013.11.004

S. Adachi, M. Shibata, T. Watanabe, Asymptotic behavior of positive solutions

for a class of quasilinear elliptic equations with general nonlinearities. Commun. Pure Appl. Anal. 13 (2014), no. 1, 97--118. (査読有)

DOI: 10.3934/cpaa.2014.13.97

S.Jimbo, Domain variation and electromagnetic frequencies, 非線形偏微分方程式, 力学系およびその応用, 数理解析研究録, 1881, 2014. (査読無)

S.Jimbo, K.Kurata, Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian with mixed boundary condition and its application, 数理解析研究所講究録, vol.1850, 2013, 127--137, (査読無)

(21) S.Jimbo, Y.Morita, Lyapunov function and spectrum comparison for a reaction-diffusion system with mass conservation, J. Differential Equations 255 (2013), 1657-1683. (査読有)

(22) S.Jimbo, Hadamard variation and electromagnetic frequencies, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, R.Magnanini et al (eds.) INdAM series 2 (2013), 179-200, Springer. (査読有)

(23) N.Hayashi, T.Ozawa, Tohru, K.Tanaka, On a system of nonlinear Schrödinger equations with quadratic interaction. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 30 (2013), no. 4, 661--690. (査読有)

(24) J.Byeon, K.Tanaka, Semi-classical standing waves for nonlinear Schrödinger equations at structurally stable critical points of the potential. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 15 (2013), no. 5, 1859--1899. (査読有)

(25) P.Felmer, A. de Laires, André, S. Martinez, K. Tanaka, High energy rotation type solutions of the forced pendulum equation. Nonlinearity 26 (2013), no. 5, 1473--1499. (査読有)

(26) T.Shibata, New method for computing the local behavior of L^q -bifurcation curve for logistic equations. Int. J. Math. Anal. (Ruse) 7 (2013), no. 29-32, 1531--1541. (査読有)

(27) T.Shibata, L^2 -inverse spectral problems for diffusive logistic equations of population dynamics. Rocky Mountain J. Math. 43 (2013), no. 1, 343--359. (査読有)

(28) T.Shibata, Direct and inverse bifurcation problems for non-autonomous logistic equations. Electron. J. Differential Equations 2013, No. 117, 14 pp. (査読有)

[学会発表](計 24 件)

K. Tanaka, 非線形楕円型方程式に対す

る特異摂動問題 --- 特に退化する場合を巡って --- (Singular perturbation problems for nonlinear elliptic equations --- variational methods for degenerate setting ---), 日本数学会年会, 特別講演, 筑波大学 (茨城県・つくば市), 2016年3月17日. (招待講演)

K. Tanaka, Existence of concentrating solutions for nonlinear elliptic equations in singularly perturbed domains, Seminari di matematica, Politecnico di Bari, Italy, 2016年3月4日. (招待講演)

T.Shibata, Inverse and direct bifurcation problems for semilinear elliptic equations, 語ろう「数理解析」(明治大学中野キャンパス(東京都・中野区)), 2016年1月23日. (招待講演)

K.Kurata, On the Gagliardo-Nirenberg inequality with magnetic field and its application to Bose-Einstein condensation, (招待講演), PDE セミナー, 北海道大学(北海道・札幌市), 2015年12月7日.

S.Jimbo, Spectra of domains with a thin tubular hole, Colloquium, Department of Mathematics, Inha University, Incheon, Korea, 2015年4月28日. (招待講演)

K.Tanaka, Singular perturbation problems for nonlinear elliptic problems, Workshop in Nonlinear PDEs, Université Libre de Bruxelles, Brussels, 2015年9月7日. (招待講演)

倉田 和浩, Bose-Einstein 凝縮に関わるある変分問題の基底エネルギーの漸近挙動について, 松山解析セミナー2015, 愛媛大学(愛媛県・松山市), 2015年2月6日. (招待講演)

— S. Jimbo, Eigenvalues of Laplacian in a domain with a thin tubular hole, 2014 NCTS Workshop on Calculus of Variations and Related Topics, National TsingHua University, Hsinchu, Taiwan, 2014年10月29日. (招待講演)

— S. Jimbo, Eigenvalues of the Laplacian in a domain with a thin tubular hole, 8th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Hotel, Serapo, Gaeta, Italy, 2014年5月26日. (招待講演)

— K.Tanaka, Singular perturbation problems for nonlinear elliptic equations in expanding tubular type domains and NLS systems, NCTS Workshop on Calculus of Variations and Related Topics, National Tsing Hua University, Taiwan, 2014年10月29日. (招待講演)

— K.Tanaka, Singular perturbation problems for nonlinear elliptic

- equations in degenerate settings, 第 39 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 北海道大学理学部(北海道・札幌市), 2014 年 8 月 27 日. (招待講演)
- K.Tanaka, Multi-peak solutions for singularly perturbed elliptic problems (Part 1,2), Workshop on nonlinear PDE and calculus of variation, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin, China, 2014 年 9 月 17 日, 19 日. (招待講演)
- T.Shibata, Inverse and direct bifurcation problems for nonlinear elliptic equations, 10th AIMS conference on Dynamical systems, differential equations and applications, The Instituto de Ciencias Matematicas, Madrid, Spain. 2014 年 7 月 8 日. (招待講演)
- T.Shibata, Inverse and direct bifurcation problems for nonlinear elliptic equations, 実領域における常微分方程式の定性的理論とその応用 (研究集会)(京都大学数理解析研究所(京都府・京都市), 2014 年 11 月 5 日. (招待講演)
- T.Shibata, Global and local behavior of oscillation bifurcation curve, International Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations, Okayama International Center, Okayama(岡山県・岡山市), Japan. 2014 年 12 月 10 日. (招待講演)
- 柴田将敬, 臨界指数を持つ Kirchhoff 型方程式の二つの正值解の存在について, 南大阪応用数学セミナー, 大阪府立大学(大阪府・大阪市), 2014 年 12 月 13 日. (招待講演)
- K.Kurata, On a five-component Gierer-Meinhardt system with saturation, One Forum, Two cities 2013; Aspects of Nonlinear PDEs, 2013 年 9 月 18 日. 早稲田大学(東京都・新宿区), (招待講演)
- K.Kurata, A remark on an optimal configuration of the limiting problem to a one dimensional phase separation problem, Interenational conference: mathematical Analysis of Nonlinear PDE, 2013 年 11 月 15 日. 九州大学(福岡県・福岡市), (招待講演)
- 倉田 和浩, On an energy asymptotics of the global minimizer of a certain variational problem related to Bose-Einstein condensation, 第 6 回東北楕円型・放物型微分方程式研究集会, 2014 年 1 月 13 日. 東北大学(宮城県・仙台市), (招待講演)
- T.Shibata, Inverse and direct bifurcation problems for semilinear elliptic equations, 非線形現象の数値シミュレーションと解析 2014 (研究集会), 北海道大学理学部(北海道・札幌市), 2014 年 3 月 7 日. (招待講演)
- (21) S. Jimbo, Domain variation and electromagnetic frequencies, North Eastern Symposium on Mathematical Analysis, Tohoku University(宮城県・仙台市), 2013 年 2 月 18 日. (招待講演)
- (22) K.Tanaka, multiple positive solutions for nonlinear elliptic equations in expanding annular type domains, 広島微分方程式研究会, 広島大学理学部(広島県・東広島市), 2013 年 10 月 11 日. (招待講演)
- (23) 柴田将敬, 半線形楕円型方程式の正值解の存在, 第 11 回浜松偏微分方程式研究集会, 2013 年 12 月 25 日. 静岡大学浜松キャンパス(静岡県・浜松市), (招待講演)
- (24) M. Shibata, Stable standing waves of nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinear term, 3rd Italian-Japanese Workshop on Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, 2013 年 9 月 4 日, 東京工業大学(東京都・目黒区). (招待講演)
- [図書](計 0 件)
6. 研究組織
- (1) 研究代表者
倉田 和浩 (KURATA, Kazuhiro)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 10186489
- (2) 連携研究者
神保 秀一 (JIMBO, Shuichi)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 80201565
- (3) 連携研究者
田中 和永 (TANAKA, Kazunaga)
早稲田大学・大学院理工学術院・教授
研究者番号: 20188288
- (4) 連携研究者
柴田 徹太郎 (SHIBATA, Tetsutaro)
広島大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号: 90216010
- (5) 連携研究者
柴田 将敬 (SHIBATA, Masataka)
東京工業大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号: 90359688