

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 12 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400184

研究課題名(和文) 消散型波動方程式の解の拡散現象と波動現象

研究課題名(英文) Diffusion phenomenon and Wave phenomenon of solutions to the damped wave equation

研究代表者

西原 健二 (NISHIHARA, Kenji)

早稲田大学・政治経済学術院・教授

研究者番号：60141876

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：定数係数線形消散項をもつ波動方程式のコーシー問題の解は、急速に減衰する波動部分と拡散部分の和として表現できる。従って、時間発展と共にその解は拡散部分に漸近する。この現象を解の拡散現象と呼ぶ。時間または空間変数に依存する係数の線形消散項をもつ場合は、その係数の減衰の度合いにより、消散項が効果的あるいは非効果的となり、それぞれ、解の拡散現象あるいは波動現象が期待される。解の拡散現象については、半線形問題の臨界指数を求めることを通じ研究は進展し、若杉勇太氏との共同研究により、半線形消散型波動方程式系を考察した。また、スリランカにおける研究集会では基調講演を行い、一連の研究の総合的な報告を行った。

研究成果の概要(英文)：The solution to the Cauchy problem for the linear wave equation with damping term having constant coefficient is decomposed to the wave part decaying rapidly and the diffusion part. Hence it approaches to the diffusion part as time tends to infinity, which is called the diffusion phenomenon. In the case that the coefficient of damping depends on time or space variables, the damping becomes effective or non-effective by the decaying order in time or space of the coefficient, and the solution to the Cauchy problem still has diffusion phenomenon or it shows wave phenomenon, respectively. The research of diffusion effect has developed. In particular, the critical exponents were obtained for the semilinear damped wave system in a series of joint works with Dr. Yuta Wakasugi. Also, the plenary lecture on these theories was given in the conference WinC 2016 in Sri Lanka.

研究分野：数学

キーワード：消散型波動方程式 拡散現象 波動現象 臨界指数 時間大域解 解の爆発

1. 研究開始当初の背景

(1) 定数係数の線形消散型波動方程式は、波動方程式と拡散方程式(熱方程式)の間に位置し、そのコーシー問題の解は時間発展とともに対応する拡散方程式の解と同様の挙動をすることが認識されていた。その解が、急速に減衰する波動方程式の解と拡散方程式の解の和に分解されることを、当研究代表者が2003年に空間3次元の場合に示した。この分解により、消散型波動方程式の解の構造が明確となり、時間発展とともに拡散方程式の解に漸近することが明らかになった。この現象を消散型波動方程式の解の拡散現象と呼ぶ。

(2) 線形消散項が時間あるいは空間変数に依存する係数を持つ場合には、その係数が時間方向あるいは空間方向に減衰する度合いが速くない場合は消散項は依然効果的で、コーシー問題の解は拡散現象を持つ。一方、係数が速く減衰する場合は消散項は非効果的となり、解は対応する波動方程式の解に漸近することが期待され、解の波動現象と呼ばれる現象となる。このような背景のもとで、消散型波動方程式の解の拡散現象と波動現象の解明が興味ある研究対象となった。

2. 研究の目的

線形消散項の係数が時間あるいは空間変数に依存する場合に、多項式増大度の半線形項をもつ半線形消散型波動方程式のコーシー問題を考察し、その半線形項の臨界指数を求め、対応する半線形拡散方程式あるいは半線形波動方程式の臨界指数と比較することにより、拡散現象あるいは波動現象の一つの証が得られる。そこで、半線形消散型波動方程式あるいはその連立系のコーシー問題を考察し、その解の性質を研究し、結果として、半線形項の臨界指数を求めることを目的とする。

3. 研究の方法

時間あるいは空間変数に依存する係数を持つ半線形消散型波動方程式あるいはその連立系のコーシー問題を考える。優臨界指数を持つ半線形項の場合には小さなデータに対する時間大域解の存在を示す必要がある。前々項の「背景」で述べた解の構造から、拡散方程式に使える強力な道具である最大値原理や平滑化効果などは使えず、主としてエネルギー法による。その際、適切な重み関数の選択が重要となり、重み付エネルギー法によって時間大域解を求める。

一方、劣臨界指数を持つ半線形項に対しては、時間局所解が適当な初期データに対して有限時間内に爆発することを示さなければならぬ。現状ではテスト関数の方法が有力で、そのさらなる工夫や、爆発を示すための常微分不等式の応用などが模索されなければならぬ。

4. 研究成果

(1) 「背景」の項で述べた内容や、その後の展望なども含め、雑誌「数学」に寄稿した論説の英訳([6])が出版されたり、また、2011年九州大学における第4回日本数学会季期研究所(MSJ-SI)における招待講演の内容が出版された([3])。

(2) 若杉勇太氏(愛媛大学)との一連の共同研究([1, 2, 4, 5])において、効果的な消散項をもつ半線形消散型波動方程式系のコーシー問題に対する半線形項の臨界指数をいくつかの条件のもとで求めた。それらの臨界指数は対応する半線形拡散方程式系に対するものと同じであった。非効果的な消散項をもつ半線形消散型波動方程式系についても、対応する半線形波動方程式系に対する臨界指数と同様となることが期待されるが、それは今後の問題として残った。さらには、効果的な消散項と非効果的な消散項が混合する場合の問題が、中尾慎宏九州大学名誉教授から提案されたが、それは完全に未解決で、今後考察すべき大きな課題として残った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(雑誌論文)(計 7件)

[1] K. Nishihara and Y. Wakasugi, Critical exponents for the Cauchy problem to the system of wave equations with time or space dependent damping, Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica (New Series) 10 (2015), 283-309.

(査読あり)

[2] K. Nishihara and Y. Wakasugi, Global existence of solutions for a weakly coupled system of semilinear damped wave equations, J. Differential Equations 259 (2015), 4172-4201.

(査読あり)

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2015.05.014>

[3] K. Nishihara, Diffusion phenomenon of solutions to the Cauchy problem for

the damped wave equation, *Advanced Studies in Pure Mathematics* 64, "Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations", Mathematical Society of Japan, 2015, 125-136. (査読あり)

[4] K. Nishihara and Y. Wakasugi, Critical exponent for the Cauchy problem to the weakly coupled damped wave system, *RIMS Kokyuroku* 1962, Kyoto University (2015), 59-67. (査読なし)

[5] K. Nishihara and Y. Wakasugi, Critical exponent for the Cauchy problem to the weakly coupled damped wave system, *Nonlinear Analysis* 108 (2014), 249-259. (査読あり)
<http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2014.06.001>

[6] K. Nishihara, Diffusion phenomena of solutions to the Cauchy problem for the damped wave equations, *SUGAKU EXPOSITIONS* 26 (Number 1) (2013), 29-47. (査読あり)

[7] K. Nishihara, Critical exponent for the semilinear wave equation with time or space dependent damping, "Progress in Partial Differential Equations", *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* 44, Springer, Switzerland (2013), 239-259. (査読あり)
DOI 10.1007/978-3-319-00125-8

〔学会発表〕(計 9 件)

[1] 講演者：Kenji Nishihara
講演タイトル：Diffusion phenomenon of solutions for damped wave equation
研究集会名：Wayamba International Conference WinC 2016,
講演年月：Aug. 20, 2016
講演場所：Wayamba University of Sri Lanka, Kuliypitiya, スリランカ

[2] 講演者：若杉勇太, 西原健二,
講演タイトル：連立非線型消散型波動方程式系の臨界指数について,
研究集会名：日本数学会年会, 函数方程式分科会,
講演年月：2015年3月23日
講演場所：明治大学

[3] 講演者：西原健二, 若杉勇太,
講演タイトル：Critical exponent for the Cauchy problem to the weakly coupled damped wave system,
研究集会名：日本数学会秋季総合分科会, 函数方程式分科会,
発表年月：2014年9月28日
発表場所：広島大学

[4] 講演者：西原健二
講演タイトル：Cauchy problem to the weakly coupled damped wave system
研究集会名：第10回非線型の諸問題非線形の諸問題
発表年月：2014年9月19日
発表場所：大分中小企業会館, 大分

[5] 講演者：Kenji Nishihara
講演タイトル：ON THE CAUCHY PROBLEM FOR WEAKLY COUPLED SYSTEM OF DAMPED WAVE EQUATIONS,
研究集会名：Wayamba International

Conference

発表年月 : Aug. 29 , 2014

発表場所 : Wayamba University of Sri Lanka, Kuliypitiya, スリランカ

[6] 講演者 : Kenji Nishihara

講演タイトル : On the Cauchy problem for weakly coupled system of damped wave equations,

研究集会名 : The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications,

発表年月 : July 9, 2014,

発表場所 : Madrid, Spain

[7] 講演者 : 西原健二

講演タイトル : Critical exponent for the Cauchy problem to the weakly coupled damped wave system,

研究集会名 : 保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性・特異性の研究

発表年月 : 2014 年 5 月 30 日

発表場所 : 数理解析研究所, 京都大学

[8] 講演者 : 西原健二

講演タイトル : 消散型波動方程式のコーシー問題の解の拡散現象 (I), (II),

研究集会名 : 第 3 回偏微分方程式レクチャーシリーズ,

発表年月 : 2014 年 5 月 18 日,

発表場所 : 福岡工業大学, 福岡

[9] 講演者 : Kenji Nishihara

講演タイトル : The Cauchy problem for a coupled system of the damped wave equations,

研究集会名 : The 9th ISAAC Congress,

発表年月 : August 5, 2013,

発表場所 : Pedagogical University, Krakow, Poland

〔その他〕
ホームページ等

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

西原 健二 (NISHIHARA, Kenji)

早稲田大学・政治経済学術院・教授

研究者番号 : 60141876