

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 14 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400185

研究課題名(和文) 実解析とエネルギー法による非有界領域上のNavier-Stokes 方程式の研究

研究課題名(英文) Research of Navier-Stokes equations in undounded domains by real analysis and the energy method

研究代表者

山崎 昌男 (Yamazaki, Masao)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：20174659

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：重力の影響下での熱対流を記述するBoussinesq方程式を重みのついた空間で考察し、解の一意存在を確立したうえで解の漸近形を二次の項まで得た。

また、2次元全平面および外部領域における定常Navier-Stokes方程式に対し、領域、外力及び境界値に新しい対称性を導入し、この仮定をみたす十分小さい外力及び境界値に対して遠方で減衰する定常解の存在を示した。

さらに、より弱い対称性の仮定の下で、十分に小さい減少する定常解のL2空間に属する任意の初期摂動に対する大域的漸近安定性を示し、また各種のノルムによる収束の速度を求めた。

研究成果の概要(英文)：For the Boussinesq equations, we established the unique existence of the solutions, and obtained the asymptotic behavior up to the second order.

Besides, for the stationary Navier-Stokes equations on two-dimensional whole plane and exterior domains, we introduced a new assumption on the symmetry of domains, external force and the boundary value, and showed the existence of solutions which decay at infinity.

Further, under a weaker assumption on the symmetry, we showed the global asymptotic stability of the stationary solutions under arbitrary perturbations in the L2-space, together with the speed of decay measured by various norms.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：Navier-Stokes 方程式 2次元 定常解 安定性 対称性

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 重力の影響下での熱対流を記述する Boussinesq 方程式については  $L_p$  空間での理論は存在したが、解の各点での値を記述する空間での理論は存在しなかった。

(2) 2次元非有界領域での定常 Navier-Stokes 方程式に対しては、Dirichlet 積分が有界である弱解の存在と、長方形 2 面体群  $D_4$  に関する対称性をみたす解がある意味で遠方で 0 に収束することは G. P. Galdi 等によって知られていたが、一意性あるいは安定性をみたすような (3 次元の場合の physically reasonable solution に相当する) 解の存在は、前者の対称性より強い、正方形 2 面体群  $D_8$  に関する対称性のある場合のみみ得られていた。またこの定常解の安定性は知られていなかった。一意性は境界値が 0 で解が小さい場合にのみ、中塚智之氏によって、エネルギー不等式を援用して得られていた。

### 2. 研究の目的

(1) Boussinesq 方程式に対する重み付き空間での解の一意存在の理論を確立し、これを用いて解の漸近挙動を記述する。

(2) 外部領域における定常 Navier-Stokes 方程式に対して、一意性及び安定性をみたすような解、すなわち R. Finn 等による 3 次元の場合の physically reasonable solution に相当する解は、3 次元の場合の結果より、遠方で 1 次に減衰する必要があると考えられる。このような解、あるいはより速く減衰する解の存在を、正方形 2 面体群に関するものより一般的な対称性に関する仮定の下で、特に境界条件が 0 以外の場合も含めて示す。さらにその定常解の安定性を、空間  $L_2$  での漸近安定性を示すとともに、収束の速度を種々の  $L_p$  ノルムで測った場合の評価も示す。

### 3. 研究の方法

(1) Boussinesq 方程式に対しては、各点での値を記述する空間での直接的な解析は困難であるため、実解析的にはより扱いやすい指数無限大、副指数 1 の斉次 Besov 空間を用いて主な解析を行い、得られた結果を元の空間での記述に翻訳して求める結果を得る。

(2) 定常 Navier-Stokes 方程式に対しては、まず全空間の場合に、十分に減衰する解を構成するため積分核の 2 階階差を用い、現れる余分な項が消滅するような必要最小限の対称性を求め、この対称性を仮定する。また外部領域においては、柴田良弘氏らによって開発された、全空間の解と有界領域の解を貼り合わせる方法を用いる。また、エネルギー法により新たなアプリオリ評価を構成し、これを用いて得られた解の漸近安定性を示す。

さらに  $L_p$  空間での収束の速度を求める

ために、2次元外部領域で Stokes 作用素の摂動のリゾルベントを構成し、これと Laplacian の平方根を用いて Stokes 作用素の摂動の生成する半群が  $L_p$ - $L_q$  評価をみたすことを示し、このことと Banach の不動点定理を併せ用いる。なおこの手法には初期値が小さいことが必要であり、そのため空間  $L_2$  に於ける漸近安定性は前記の手法で予め示しておく必要がある。

### 4. 研究成果

(1) Boussinesq 方程式に対しては、解は同じ初期値を持つ線形化方程式の解で近似されるが、非線形性による解の相互作用により差が生ずる。この差は方程式の非線形性の表れであるが、この主要項、すなわち解の漸近形の第二項を簡明な形を得た。

(2) 定常 Navier-Stokes 方程式については、まず全平面において適切な減衰および対称性をみたす小さなポテンシャルに対し、ポテンシャルによって与えられる外力の下で、遠方で 1 次に減衰する定常解を得た。この定常解は 4 次巡回群  $C_4$  に関する対称性を持つ。この対称性は正方形 2 面体群に関する対称性より一般であり、長方形 2 面体群に関するものとは包含関係がない。ここで対称性の一般性は群の包含関係として記述される。またこれらの対称性は、座標変数に群の要素を作用させた点での速度ベクトルが、元の点での速度ベクトルに群の要素を作用させたものと一致する、すなわち群に関する同変性として記述される。この見方は L. Brandolese によるものである。

本研究で得られた対称性は原点のとり方にも依存し、座標軸の取り方によらない点で、無限遠での流速が 0 の場合は 2 面体群に関する対称性より自然なものと考えられる。またポテンシャルがさらに強い減衰をみたす場合には、対応する解が 1 次より強い減衰をみたすことも得られた。

さらにこの結果を 2次元外部領域に、ポテンシャルは上と同様の仮定をみたし、自明でない境界値は十分小さく上の対称性をみたす場合について拡張した。ただし 1 次より強い減衰をする定常解が存在するために、境界値の流出が 0 であるという本質的な仮定をおいた。

一方 2次元外部領域における定常解が十分小さく 1 次の減衰をみたし、原点に関して点対称ならば、原点に関して点対称な任意の  $L_2$  空間に属する初期摂動に対し漸近安定であることを、エネルギー法を用いて新たなアプリオリ評価を示し、それを適用することによって示した。原点に関する点対称性は 2 次巡回群  $C_2$  に対応し、長方形 2 面体群に関する対称性と 4 次巡回群に関する対称性との双方より一般的である。また定常解が 1 次より速く減衰する場合には、初期摂動についての対称性は不要である。

また、Hilbert 空間  $L_2$  におけるスペクト

ル分解を用いて Stokes 作用の摂動のリゾルベントを構成し、これと Laplacian の平方根を用いて Stokes 作用素の摂動の生成する半群が  $L_p$ - $L_q$  評価をみたすことを示した。この結果は 2 次元外部領域では初めてのものである。この結果を Banach の不動点定理に応用することで、上の収束の  $L_p$  空間における速度の評価を求めた。特に  $p$  が無限大の場合の評価に斉次 Besov 空間の理論を本質的に用いた。なおこれらの結果は、定常解がより速く減衰する場合は、対称性をみたまない初期摂動に拡張される。

以下に未解決問題をいくつか示す。

1. 境界条件が 0 でない場合にもエネルギー不等式が拡張できるか？またこの場合 Galdi 等の方法で構成した弱解は拡張されたエネルギー不等式をみたすか？
2. 境界条件が 0 でない場合も含め、上で得られた定常解が存在して十分小さいとき、拡張されたエネルギー不等式をみたす弱解は上の定常解と一致するか？
3. 1 次の減衰をする定常解が存在するために、対応する定常解が 4 次巡回群になるようなポテンシャルに関する対称性は必要か？すなわち、対応する定常解が拡張されたエネルギー不等式をみたすが、1 次の減衰をしないポテンシャルは存在するか？
4. 外力が時間に依存する場合にも対応する諸結果は得られるか？

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

M. Yamazaki, Two-dimensional stationary Navier-Stokes equations with 4-cyclic symmetry, *Mathematische Nachrichten*, 査読有, 289 (2016), 2281-2311, DOI:10.1002/mana.201500332.

M. Yamazaki, Rate of convergence to the stationary solution of the Navier-Stokes exterior problem, *Recent Development of Mathematical Fluid Mechanics*, 査読有, 2016, 459-482, DOI:10.1007/978-3-0348-0930-9\_24

G. P. Galdi and M. Yamazaki, Stability of stationary solutions of two-dimensional Navier-Stokes equations, *Gakuto International Series of Mathematical Sciences and Applications*, 査読有, 37 (2015), 135-162.

R. Farwig, R. Schulz and M. Yamazaki,

Concentration-diffusion phenomena of heat convection in an incompressible fluid, *Asymptotic Analysis*, 査読有, 88 (2014), 17-41, DOI:10.3233/ASY-131211.

[学会発表](計 4 件)

M. Yamazaki, Existence and uniqueness of weak solutions to the two-dimensional stationary Navier-Stokes exterior problem, *The 16<sup>th</sup> International Conference, Navier-Stokes Equations and Related Topics*, 名古屋大学, 2016 年 3 月

M. Yamazaki, The Navier-Stokes equations on the whole plane with time-dependent external forces, *Harmonic Analysis and its Applications*, 早稲田大学, 2015 年 11 月

M. Yamazaki, Two-dimensional Navier-Stokes exterior problem with some symmetry conditions, *JSPS-DFG Japanese-German Graduate Externship of Mathematical Fluid Dynamics*, 早稲田大学, 2014 年 6 月

M. Yamazaki, The stability and the rate of convergence to stationary solutions of the two-dimensional Navier-Stokes exterior problem, *Vorticity, Rotation et Symetrie (III)-Analyse des Situations Limites et Theorie des Fluides*, *Centre International de Rencontres Mathematique*, Marseille, 2014 年 5 月

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山崎 昌男 (YAMAZAKI, Masao)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号：20174659

### (2) 研究分担者

( )  
研究者番号：

### (3) 連携研究者

柴田 良弘 (SHIBATA, Yoshihiro)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号：50114088

小園 英雄 (KOZONO, Hideo)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号：00195728

田中 和永 (TANAKA, Kazunaga)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号：20188288

### (4) 研究協力者

高橋 剛 (TAKAHASHI, Go)  
早稲田大学・基幹理工学研究科・大学院生

FARWIG, Reinhard  
Darmstadt 工科大学・教授

GALDI, Giovanni Paolo  
Pittsburgh 大学・教授