

平成 30 年 6 月 8 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400193

研究課題名(和文) 集合論の演算子の証明論的研究

研究課題名(英文) proof-theoretic investigations of operations on sets

研究代表者

新井 敏康 (Arai, Toshiyasu)

千葉大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：40193049

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：weakly compact cardinalをMahlo operationsの繰返して捉えた。ZF集合論でその存在が証明できる可算順序数の限界をMostowski collapsingの繰返して記述した。集合上で多項式時間計算可能関数を生成する計算規則を考案し、対応する公理系を導入した。直観主義論理上での不動点の存在は保存拡大になることを証明した。順序数上の正則関数の微分の整列順序原理と可算モデルの存在との関係を明らかにした。最小の非可算基数の集合論でのカット消去を有限の手続きで証明した。自然数上の最小不動点の公理系の諸断片の可述的なものの境界線を確定した。

研究成果の概要(英文)：We characterized the existence of weakly compact cardinals in terms of iterations of weakly Mahlo operations. We described ZF-provably existing countable ordinals by means of iterations of Mostowski collapsings. We introduced a class of set functions, which are computable in polynomial time, and introduced a theory in which Σ_1 -definable functions are exactly polynomial time computable set functions. We showed that intuitionistic fixed point theories over a weak set theory is a conservative extension of the weak set theory. We showed that the wellordering principle of the derivative of a normal function on ordinals is equivalent to the existence of arbitrarily large countable coded ω -models of the normal function. We gave a finitary procedure by which cut inferences are eliminated from derivations for set theory of ω . We determined a line between predicative and impredicative fragments of the theory of positive elementary inductive definitions.

研究分野：数学基礎論

キーワード：証明論

1. 研究開始当初の背景

集合論の証明論的研究は KP 集合論とその拡張に対して順序数解析が stable ordinals までは M. Rathjen, T. Arai によりできていた。ここでいう順序数解析とは形式的理論の証明論的順序数を具体的に与えることであり、これにより当該の理論において証明可能な算術的論理式が特徴付けられる。また順序数 \aleph_α が stable なのは Goedel の constructible universe L の始切片 L_{\aleph_α} が L の Σ_1 -elementary submodel になることである。言い換えれば L_{\aleph_α} からの parameter をふくむ Σ_1 -論理式が L で成立すればすでに L_{\aleph_α} で成立するということである。いずれにしても最小の stable ordinal は可算である。そこで従来の順序数解析より広くは証明論における手法を非可算基数や小さいクラスの集合関数などへ拡張することが課題として浮上した。この課題は従来の証明論の手法やアイデアをより広い視野において眺め直すことにもなるし、また証明論の対象とする理論を拡げることにも繋がるのが予想される。他方でそれらの手法の限界と適用可能性の前提を洗い直すことにもなり、新しい分野の開拓や新たな視点の導入を目指すことにも向かい得る。

2. 研究の目的

集合論の証明論的研究をその演算子に着目して、強弱取り混ぜてその証明論的な強さを記述する方法を開発しながら前進させることを目的とする。これはひとつには上へと上昇して行く運動であり、他方では下へと下降していく。上昇する際には、対象となるのが非可算基数、弱到達不能基数、弱コンパクト基数などの構成可能性公理 $V=L$ と矛盾しない範囲での small large cardinals であり、これらの recursive analogues の証明論を上へと持ち上げて行く必要がある。逆に言えば後者が何によってできていたのかを照射することになる。また下へ向かう運動においては Π_1 -comprehension axiom や 1 階算術、さらには多項式時間計算可能関数にまで降りて行って、それらを新しい視点から研究し直す。これを通じて集合を証明論の側面からの理解を深める。また証明を集合から捉え直す。この相互の運動を相補的に進めることで両面的な観点を保持する。

3. 研究の方法

主な手法はカット消去であるが、同時に可算順序数を記述する方法や小さいクラスの関数生成法の開発などを行う。さらにモストフスキ崩壊やコンパクト基数の関係を証明論の視点から調べる。より小さい関数族は Bellantoni-Cook の手法にならって、ふたつの arguments に分けて考える。同時に集合のクラスを導入して、そこだけで再帰ができ

るようにする。これを公理化するためには新しい証明論的な洞察が必要となる。また W. Buchholz による operator controlled derivations の手法を様々な場面に適用できるように改変する。例えば operator の代わりに admissible set を取る。直観主義論理の上で strictly positive formula による不動点の存在は証明論的に弱いことを示すのに、従来は顧みられなかったカット消去を同時並行に行う。さらに自然数を定義する Π_1 -論理式において変数を論理式で置き換えることで弱い算術の上で数学的帰納法を導く。他方で R. Jensen による弱コンパクト基数の反映性による特徴付けを用いて、弱コンパクト基数の証明論を反映順序数に対するそれを拡張することで得る。これらの証明論的研究においては operator controlled derivation を用いるのが理解を得易いが、他方では有限的にも可能なはずである。つまり Gentzen の方法の拡張において強い集合論の証明論的研究をする。一方で、順序数上、とくに正則順序数上での正則関数の微分の存在は predicative proof theory での概要であるが、この事実の証明論的な位置を画定させるために countable coded ω -model を考えていくのが有効である。

4. 研究成果

(1) weakly compact cardinal を Mahlo

operations の繰返しで証明論的に捉える結果を得た。つまり Mahlo operations の繰返しによって記述される順序数の体系を導入してこれによって weakly compact cardinals の存在から証明できる可算順序数を記述することができた。これは巨大基数に関する初めての証明論的研究であった。

(2) Zermelo-Fraenkel 集合論に構成可能性

公理を付け加えた公理系でその存在が証明できて論理式で定義できるような可算順序数の限界を Mostowski collapsing の繰返しで記述した。逆にこのように記述された可算順序数は Zermelo-Fraenkel 集合論に構成可能性公理を付け加えた公理系でその存在が証明できることも示し、よって Zermelo-Fraenkel 集合論に構成可能性公理を付け加えた公理系で存在が証明できる可算順序数を完全に特徴付けた。

- (3) 最小の非可算基数の集合論でのカット消去を順序の比較を除いて有限的手続きで証明した。これはGentzen-Takeutiの方法の有効性を示す。
- (4) 再帰的到達不能順序数の集合論と同等である2階論理のカット消去をGentzen-Takeutiの方法を、Schuetteにならって拡張して有限的に示した。
- (5) reflecting ordinalsについて、反映する論理式をひとつ下げたものの繰返しに一つ上のものを証明論的に帰着させた。方法はW. Buchholzによるoperator controlled derivationsにおけるoperatorの代わりにadmissible setsを考えることであった。
- (6) first order reflecting ordinalsの順序数解析を行った。
- (7) 2階論理のカット消去の証明を統一的に捉え直した。
- (8) 直観主義論理上での不動点の存在は保存拡大になることを証明した。これは集合論の証明論的解析において保存拡大性を示すときに必要であった。
- (9) 順序数上の正則関数の微分の整列順序原理が、もとの関数の整列順序原理の任意に大きい可算モデルの存在と同値であることを示した。
- (10) 自然数上の最小不動点の公理系の諸断片のうちで、可述的なものとそうでないものの境界線を確定し、弱い公理系上でのパラメタ無しの $\forall \Pi^1_1$ -comprehension axiomの証明論的強さに関するA. Weiermannによる予想を否定的に解決した。
- (11) 集合上で多項式時間計算可能関数を生成する計算規則を考案した。生成規則はBellantoni-Cookのものの集合版である。
- (12) 集合上で多項式時間計算可能関数のみの存在を証明する公理系を導入した。

これはKP集合論に再帰を許すクラスを導入することによった。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9件)

1 T. Arai, Cut-elimination for $\forall\Omega_1$, to appear in Annals of Pure and Applied Logic.

2 T. Arai, Cut-eliminability in second order logic calculus, to appear in Annals of the Japan Association for Philosophy of Science

3 T. Arai, Derivatives of normal functions and $\forall\Omega$ -models, to appear in Archives for Mathematical Logic, 査読有

4 T. Arai, Intuitionistic fixed point theories over set theories, Archives for Mathematical Logic, 査読有, vol.54 (2015), 531-553.

5 T. Arai, Predicatively computable functions on sets, Archives for Mathematical Logic, 査読有, vol.54(2015), 471-485.

6 T. Arai, Proof theory for theories of ordinals III: $\forall \Pi_1$ -reflection, Gentzen's centenary: the quest of consistency, eds. R. Kahle and M. Rathjen, 査読有, pp. 357-424, Springer, 2015.

7 T. Arai, Conservations of first-order reflections, Journal of Symbolic Logic, 査読有, vol. 79, issue 3 (2014), pp. 814-825.

8 T. Arai, Lifting proof theory to the countable ordinals : Zermelo-Fraenkel's set theory, Journal of Symbolic Logic, 査読有, vol. 79, issue 2 (2014), pp. 325-354.

9 T. Arai, Proof theory of weak compactness, Journal of Mathematical Logic, 査読有, vol.13, no.1(2013), 1350003, 26pages

[学会発表](計 9件)

1 T. Arai, Proof-theoretic strengths of weak theories for positive inductive definitions, Oberseminar, LMU Muenchen, Feb.. 21, 2018

2 新井 敏康, 竹内の基本予想の意味論的証明, 科学基礎論学会秋の例会, 2016年11月5日

3 新井 敏康, 角田先生、証明論を分って下

さい, 京都大学数理解析研究所研究集会「数学基礎論とその応用」, 2016年9月27日.

4 T. Arai, Finitary analyses of regularities, Operations, Sets, and Types, Apr. 18-20, 2016, Bern, Switzerland

5 T. Arai, Proof theory for set theories, Aug. 7, 2015. Logic Colloquium 2015, Helsinki, Finland.

6 T. Arai, Axiomatizing some small classes of set functions, Program on sets and computations, Institute for mathematical sciences, National University of Singapore, Apr. 15, 2015.

7 T. Arai, Proof search in multi-succedent sequent calculi for intuitionistic logic, Logic Seminar Series, JAIST, Feb. 20, 2014.

8 T. Arai, Set theory and ordinal analyses, Asian Mathematical Conference 2013, Busan, Korea, Jul. 1, 2013.

9 T. Arai, Predicatively computable functions on hereditarily finite sets, the 3rd Workshop on Proof Theory and Rewriting, Mar. 4-8, 2013

〔図書〕(計 1件)

1 新井 敏康, 東京図書, 集合・論理と位相, 241

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

名称: なし
発明者: なし
権利者: なし
種類: なし
番号: なし
出願年月日: なし
国内外の別: なし

取得状況(計 0件)

名称: なし
発明者: なし
権利者: なし
種類: なし
番号: なし
取得年月日: なし
国内外の別: なし

〔その他〕

ホームページ等
<http://researchmap.jp/tosarai>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

新井 敏康 (ARAI, Toshiyasu)
千葉大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 40193049

(2) 研究分担者
(なし)

研究者番号: なし

(3) 連携研究者
(なし)

研究者番号: なし

(4) 研究協力者
(なし)