様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 ３１ 日現在

機関番号：１２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４００１９６

研究課題名（和文）代用電荷法と双極子法の理論的・実験的研究

研究課題名（英文）Theoretical and experimental study of the charge simulation method and the dipole simulation method

研究代表者
緒方　秀教（Ogata, Hidenori）

電気通信大学・情報理工学（系）研究科・教授

研究者番号：５０２４２０３７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、科学技術計算におけるポテンシャル問題の数値解法である代用電荷法および双極子法の理論・実験的研究を目的とする。代用電荷法は仮想点電荷のポテンシャルの重ね合わせで解を近似する方法であり、点電荷の代わりに仮想電気双極子のポテンシャルを用いると双極子法を得る。双極子法について双極子配置の仕方に特に研究の重点を置き、円周の等分点を等角写像で写した点に双極子を置く方法がよいことを数値実験により示した。
また、代用電荷法・双極子法の複素解析関数近似の応用も行い、理論・実験両面からこの解析関数近似が良い精度を達成することを示した。
さらに、関連研究として、佐藤超函数論に基づく数値積分の研究も行った。

研究成果の概要（英文）：In this study, we examined the charge simulation method and the dipole simulation method for potential problems. In the charge simulation method, we approximate the solution by the superposition of fictitious point charges. We obtain the dipole simulation method as an approximation by the superposition of fictitious electric dipoles in stead of point charges. We are especially interested in the positioning of the dipoles and found from numerical experiments that it is good to use the points obtained by a conformal mapping of equally distributed points on a circle.
We also applied these methods to the approximation of complex analytic functions. We find that these approximations achieve good accuracy by theoretical error estimates and numerical experiments.
Besides, as a related research, we studied numerical integration methods based on the hyperfunction theory.

研究分野：数値解析

キーワード：代用電荷法　双極子法　ポテンシャル　複素関数論　解析関数　数値積分　超函数

１．研究開始当初の背景

（文中の[ローマ数字]は第 3 項末尾に記す参考文献を表す）

科学技術計算において偏微分方程式の数値解法は重要であり，有限要素法・差分法・境界要素法などが研究開発現場において広く用いられている．本研究で扱う代用電荷法（基本解近似解法）はとくにポテンシャル問題（ラプラス方程式）の有力な数値解法のひとつであり[v]，電気力学の研究に起源を持つ[x]．この方法はプログラミングが簡単で計算量が少ない上に，ある条件下では節点数を増やすにつれて近似解が真の解に指数関数的収束するという利点がある[ii]．具体的に 2 次元ポテンシャル問題の場合に代用電荷法を説明すると，領域 D におけるラプラス方程式 $\Delta u = 0$ に対し，代用電荷法の近似解は

$$u_N(\vec{u}) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log\|\vec{x} - \vec{\xi_j}\| \qquad (1)$$

（$\vec{\xi_j}$: 問題領域 D 外部の点，Q_j : 実数係数（電荷））という形になる．物理的には，2 次元点電荷の作るポテンシャルの重ね合わせで解を近似していることに相当する（図 1 参照）．近似解はラプラス方程式を問題領域 D で厳密に満たし，境界条件は Q_j を適当に決めて近似的に満たすようにする．

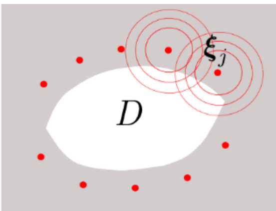

図 1.　代用電荷法のイメージ

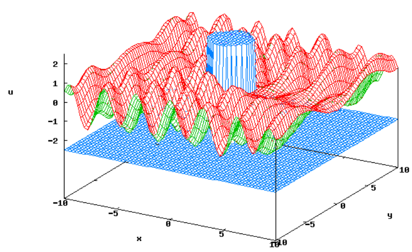

図 2. 代用電荷法により計算した，2 次元平面波の円柱による散乱の様子

上ではポテンシャル問題に対する代用電荷法を説明したが，代用電荷法は電気力学のポテンシャル問題以外にも，科学技術研究の諸分野で用いられている．天野らは代用電荷法の数値等角写像への応用を行っている．また，代用電荷法はポテンシャル問題に限らずとも，偏微分方程式の基本解（グリーン関数）がわかっていれば適用可能なので，流体問題[vi, viii]，弾性問題[vii]，波動問題[ix, x]（図 2 参照）など様々な偏微分方程式に適用されている．また，近年，緒方らは周期的領域問題[vii, viii]，非線形問題[vii]といった，従来代用電荷法の適用が困難な問題に対する代用電荷法の改良版を提案していた．

２．研究の目的

本研究では，点電荷の代わりに電気双極子を用いる代用電荷法「双極子法」の研究を行う（[iii]にも双極子法に関する記述がある）．従来の代用電荷法では点電荷ポテンシャルの重ね合わせで解を近似するが，その代わりに双極子ポテンシャルの重ね合わせで近似するのである．2 次元問題の場合に具体的に記すと，領域 D におけるラプラス方程式 $\Delta u = 0$ に対し，双極子法では

$$u_N(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} \frac{\vec{p_j}\cdot(\vec{x} - \vec{\xi_j})}{\|\vec{x} - \vec{\xi_j}\|^2} \qquad (2)$$

（$\vec{\xi_j}$: D 外部の点，$\vec{p_j}$: 実定数ベクトル（双極子モーメント））の形で近似解を与える．この双極子は外部領域問題，複素解析関数近似で威力を発揮すると期待される．その理由は，外部領域問題では解は遠方で有界という条件を課されることが多いが，従来の代用電荷法の近似解は無条件でその条件を満たさない一方，双極子法は無条件で満たす．数値等角写像など複素解析関数の近似問題では，代用電荷法では複素解析関数を複素対数関数で近似することになるので，複素対数関数の多価性を回避するという問題が生じる一方，双極子法では有理関数近似になるので多価性の問題は生じない．

本研究では，理論・実験両面から双極子法の性能を検証し，[i]と同様，複素解析関数近似・数値等角写像への応用を試みる．

３．研究の方法

（１）双極子法の理論的・数値的研究

双極子法ではラプラス方程式の境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = f & \text{on } \partial D \end{cases} \qquad (3)$$

に対し (2) の形で近似解を与える．近似解 $u_N(\vec{x})$ はラプラス方程式を領域 D で厳密に満たし，双極子 $\vec{p_j}$ を適切に選ぶことにより境界条件を近似的に満たす．双極子は具体的には選点法により定める，すなわち，拘束点と呼ばれる境界点 $\vec{x_i}\,(i = 1, \dots, N)$ をとり，方程式

$$u_N(\vec{x_i}) = f(\vec{x_i}) \qquad (i = 1, \dots, N) \quad (4)$$

により定める．方程式 (4) は双極子 $\vec{p_j}$ に関する連立一次方程式をなす．

ここで問題になるのは，双極子点 $\vec{\xi_j}$，拘束点 $\vec{x_i}$ の取り方である．D が円板領域の場合は同心円上に等間隔に取るのがよいことが理論・実験からわかっている．一般の内部単連結領域の場合は，同心円上の等間隔点を等角写像に

より写した点を双極子点・拘束点にとる方法が考えられる（図 3 参照）．従来の代用電荷法の場合この方法がよいことが理論的に示されているが[iv]，双極子法の場合もこの方法がうまくいくか検証する．

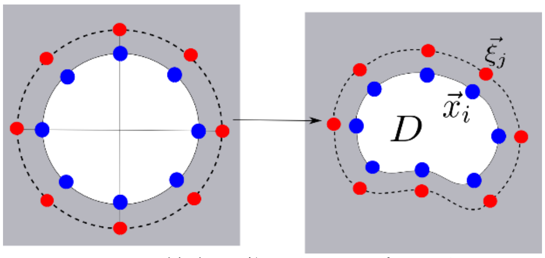

図 3．等角写像を用いた点配置

（２）代用電荷法・双極子法による複素解析関数近似

代用電荷法による複素解析関数近似は，天野らの数値等角写像の研究[i]においてすでに行われている．[i]では，近似しようとする複素解析関数 $f(z)$に対し，その実部が調和関数（ラプラス方程式の解）であることに着目して代用電荷法により式(1)で実部を近似，虚部は実部の共役調和関数であることに注意することにより，

$$f(z) \approx f_N(z) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} Q_j \log(z - \zeta_j) \quad (5)$$

という形の近似式を得る．ここで，Q_jは実数係数（電荷），ζ_jは $f(z)$が正則である領域 D 外部の点である．

これと同様にして，複素解析関数 f(z)の双極子法近似を試みる．ここでも，f(z)の実部が調和関数であることに着目して双極子法により式(2)の形で実部を近似，虚部は実部の共役調和関数であることに注意することにより，結局

$$f(z) \approx f_N(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N} \frac{p_j}{z - \zeta_j} \quad (6)$$

の形の近似を得る．ここで，p_jは双極子に相当する複素定数，ζ_jは $f(z)$が正則である領域 D 外部の点である．本研究では，(5)あるいは(6)の複素関数近似の精度を理論誤差評価により与え，数値実験により検証していく．

なお，研究開始当初は，ポテンシャル問題以外の偏微分方程式（ヘルムホルツ方程式，重調和方程式など）に対する代用電荷法の研究も研究計画に加えられていた．

＊１．～３．の参考文献

[i] 天野要，代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，第 28 巻（1987 年）697–694．

[ii] M. Katsurada and H. Okamoto: A mathematical study of the charge simulation method I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math., 35 (1988) 507—518.

[iii] M. Katsurada: A mathematical sduty of the charge simulation method II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., 36 (1989), 135—162.

[iv] M. Katsurada: Asymptotic error analysis of the charge simulation method in a Jordan region with analytic boundary, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., 37 (1989), 153—162.

[v] 村島定行：代用電荷法とその応用–境界値問題の半解析的近似解法–，森北出版，1983 年（POD 版 2008 年）.

[vi] H. Ogata: Charge simulation method for two-dimensional compressible fluid flow, Japan J. Indust. Appl. Math., 22 (2005) 1—20.

[vii] H. Ogata: Fundamental solution method for periodic plane elasticity, J. Numer. Anal. Indust. Appl. Math., 3 (2008) 249—267.

[viii] H. Ogata and K. Amano: Fundamental solution method for two-dimensonal Stokes flow problems with one-dimensional periodicity, Japan J. Indust. Appl. Math., 27 (2010) 191—215. DOI:10.1007/s13160-010-0001-1.

[ix] H. Ogata, F. Chiba and T. Ushijima: A new theoretical error estimate of the method of fundamental solutions applied to reduced wave problems in the exterior region of a disk, J. Comput. Appl. Math., 235 (2011) 3395—3412. DOI: 10.1016/j.cam.2011.01.042.

[x] F. R. Sánchez-Sesma and E. Rosenblueth, Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves, Earthq. Eng. Struct. Dyn., 7 (1979) 441—450.

[xi] H. Singer, H. Steinbigler and P. Weiss: A charge simulation method for the calculation of high voltage field, IEEE Trans. Power Appar. Syst., PAS-93 (1974) 1660—1668.

４．研究成果

平成 25 年度は，双極子法の精度についての研究を行った．双極子法は，ポテンシャル問題に対し，問題外部領域に置いた仮想的な双極子のポテンシャルの重ね合わせで解を近似する方法である．双極子法では，代用電荷法と同様，双極子の配置の仕方が計算精度を左右し，よい双極子配置の決定が重要な問題となる．円板領域問題の場合，円周上に等間隔に双極子を置くのがよいことが直感的に予想され，理論的にもこの配置がよいことが示される．問題なのが，一般の内部単連結領域の場合である．従来の代用電荷法では，円周の等分点を等角写像で写した点を用いるのがよいとされており，双極子法でもその方法がよいと予想した．そして，楕円内部領域の問題に対してこの方法を試し，この配置法が有効

であることを実験的に確かめた.

平成 26 年度は，代用電荷法・双極子法を複素解析関数近似に応用する研究を行った．複素解析関数は実部が調和関数，虚部がその共役調和関数であることに着目し，実部を代用電荷法または双極子法で近似し，虚部をその共役調和関数で近似することにより，解析関数近似を得る（図 4.−5 参照)。．そして，双極子法近似は複素関数論のコーシーの積分公式の離散化と見なせる．さらに，周期解析関数に対する代用電荷法・双極子法による近似も得た.

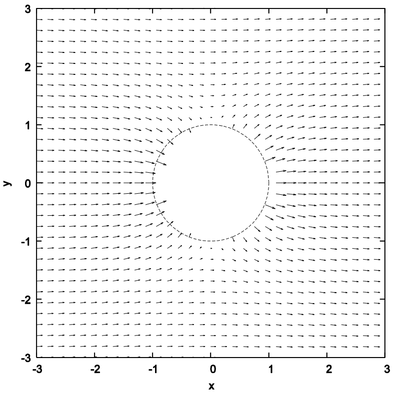

図 4．双極子法による複素関数近似で求めた金属円柱周りの一様電場.

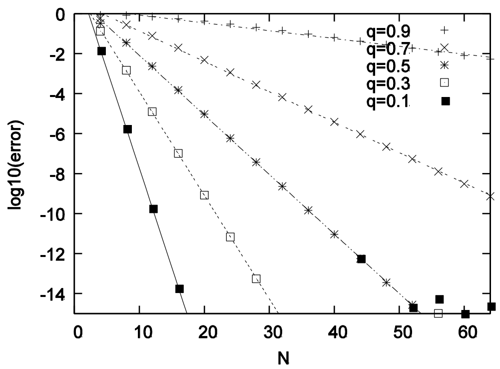

図 5. 図 4 で示した双極子法の計算の誤差. 縦軸は相対誤差の常用対数，横軸は双極子数である.

平成 27 年度は，本研究課題に関連して，1 変数複素解析関数の積分に対する新しい数値積分法−下記により「超函数法」と呼ぶ−について理論・実験両面から研究を行った.
超函数法は当初，平山弘（神奈川工科大学）により提案された．この方法では複素関数論の基礎定理であるコーシーの積分公式を用いて求めたい積分を複素周回積分に書き直した上で，それを台形公式により数値計算する．台形公式は周期解析関数の積分計算には極めて有効であるので，超函数法は極めて高精度な数値積分公式である．実際，超函数法は，理論誤差解析により積分近似値が真値に指数関数的収束し，数値実験により，とくに積分区間端点に強い特異性を持つ積分に対して極めて有効であることがわかった．端点特異性を持つ積分に有効な数値積分公式として従来「DE 公式」が知られているが，その DE 公式でさえ計算できないような特異性の極めて強い積分にでさえも，超函数法は有効に働くことがわかった.

そして，「超函数法」は佐藤超函数論と密接に関係していることがわかった．佐藤超函数論とは複素関数論に基づく一般化関数論であり，極・不連続・デルタ関数といった特異性を含む関数を，定義関数と呼ばれる複素解析関数の境界値の差で表現するものである．超函数の積分はその定義関数の複素積分で表される．超函数法では求める積分を複素周回積分に変換して近似計算しているが，その複素積分は被積分関数を超函数とみなして，その超函数積分を与える複素積分を近似計算することに相当することがわかった.

なお，研究開始当初は，ラプラス方程式以外の偏微分方程式に対する代用電荷法の研究も計画していたが，これに関しては成果を上げることができなかった．その理由は，この問題がとくに理論的に困難であったからであるが，研究遂行可能性に対する見込みが甘かったことは反省すべき点である.

５．主な発表論文等
（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

<u>緒方秀教</u>，平山弘：数値積分に対する超函数法，日本応用数理学会論文誌，Vol.26, No.1 (2016), 33−43.

天野要，岡野大，遠藤慶一，<u>緒方秀教</u>：代用電荷法による Koebe(1916)の正準スリット領域への数値等角写像，日本応用数理学会論文誌，Vol.24，No.3 (2014)，157−183.

<u>H. Ogata</u>: Dipole simulation method for two-dimensional potential problems, NOLTA, IEICE, Vol. 5, No.1 (2014), 2—14.

K. Amano, D. Okano, K. Endo and <u>H. Ogata</u>: Numerical conformal mappings onto the spiral slit domain by the charge simulation method, Information, Vol.16, No.12(B) (2013), 8575—8578.

<u>H. Ogata</u> and M. Katsurada: Convergence of the invariant scheme of the method of fundamental solutions for two-dimensional potential problems in a Jordan region, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol. 31 (2013), 231—262, DOI 10.1007/s13160-013-0131-3.

〔学会発表〕（計 9 件）

<u>H. Ogata</u>: Numerical integration method

based on the hyperfunction theory, The 2nd International ACCA-JP/UK Workshop, 19 January 2016, Kyoto Univ., Japan (Joint work with H. Hirayama).

H. Ogata and H. Hirayama: Numerical Integration method based on the hyperfunction theory, ICMSA 2015, 23 November 2015, Pattaya, Thailand.

（招待講演）緒方秀教：佐藤超函数論に基づく数値積分，武蔵野大学数理工学シンポジウム 2015，2015 年 11 月 19 日（木），武蔵野大学有明キャンパス．

緒方秀教，平山弘：複素周回積分による数値積分の理論誤差評価およびその応用，日本応用数理学会 2015 年度年会，2015 年 9 月 11 日，金沢大学角間キャンパス．

H. Ogata and H. Hirayama: Hyperfunction method for numerical integrations, ICPAM 2015, 25 August 2015, Van, Turkey.

緒方秀教，榊原航也，桂田祐史：代用電荷法および双極子法による複素解析関数の近似，日本数学会年会，2015 年 3 月 24 日（火），明治大学駿河台キャンパス．

H. Ogata, K. Sakakibara and M. Katsurada: Charge or dipole simulation method for approximation of complex analytic functions, ICRAPAM 2014 (International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics), 7 November 2014, Antalya, Turkey.

H. Ogata: Dipole simulation method and its application to numerical conformal mappings, 5th Asia Pacific Congress on Computational Mechanics (APCOM2013), 12 December 2013, Singapore.

H. Ogata: Dipole simulation method for two-dimensional potential problems in exterior regions and periodic regions, Conference on Mathematical Modelling in Physical Sciences, 5 September 2013, Prague, Czech.

６．研究組織
(1)研究代表者
緒方　秀教（Hidenori Ogata）
電気通信大学大学院　情報理工学研究科
情報・通信工学専攻　教授
研究者番号：50242037