様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：１２６１３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４００１９８

研究課題名（和文）3次元有限要素法に対する精度保証および高精度計算についての研究

研究課題名（英文）Research on the efficient calculation and numerical verification for the 3-d finite element method

研究代表者
小林　健太（KOBAYASHI, Kenta）

一橋大学・大学院商学研究科・准教授

研究者番号：６０４３２９０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は、3次元有限要素法に対する精度の良い誤差評価の確立と、その精度保証付き数値計算への応用です。有限要素法の誤差解析において、補間誤差の評価は極めて重要な役割を果たしています。既存の研究においては、補間誤差の解析に際して、有限要素分割を構成する四面体に正則性条件や一般化された最大角条件などの制約条件を課すことが一般的でした。それに対して我々は、四面体の幾何学的条件に依らないLagrange補間の誤差評価を確立することができました。この結果は、3次元における偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算に対しても応用できる可能性があると考えています。

研究成果の概要（英文）：In our research, we focused on the error analysis of the 3-dimensional finite element method and its application to the numerical verification method. The analysis of the interpolation error is particularly important for the error analysis of the finite element methods. In the preceding researches, the error analysis of the interpolation is done under the geometric assumptions such as the shape regularity or the generalized maximum angle condition. On the other hand, we present a new type of error estimation for the Lagrange interpolation which requires no geometric condition on tetrahedrons. This result would be applied to the numerical verification for the partial differential equation in the 3-dimensional problems based on the finite element method.

研究分野：数値解析

キーワード：有限要素法　補間誤差評価　Lagrange補間　四面体要素　精度保証付き数値計算

## 1．研究開始当初の背景

（1）有限要素法は、理学や工学の分野で広く用いられている数値計算法であり、現実社会でも建築物の構造解析、車両や航空機に対する流体解析など、様々な解析に利用されています。しかし、有限要素法の誤差解析などの理論的な側面については、2 次元の場合にはある程度の研究がなされているものの、3 次元の場合にはほとんど研究が進展していませんでした。有限要素法においては、計算領域を有限要素といわれる細かい小領域に分割して計算を行いますが、この分割された有限要素の形状（2 次元においては三角形や四辺形、3 次元においては四面体や六面体）が計算精度に大きく影響することが知られています。通常、有限要素法で解（有限要素解）を精度良く計算するには、有限要素分割の際に形の潰れた要素ができるだけ現れないようにすることが重要であると考えられてきました。実際、有限要素法の有名な教科書でも、潰れた要素が存在しないことを前提に収束等の議論がなされることが多いのが現状です。実際の数値計算では、2 次元においては、潰れた有限要素を含まないような有限要素分割を比較的容易に実現することができますが、特に 3 次元においては、有限要素分割は非常に計算コストのかかる作業であり、ある程度大規模な問題になると、潰れた形状の有限要素が混入してしまうのは避けられないのが現状です。そのため、潰れた形状の有限要素がどの程度、解の精度に影響するかを解明するのが、有限要素法の分野の課題の一つでした。

（2）近年、計算機を用いて関数方程式の解の存在や一意性などを厳密に証明する、精度保証付き数値計算という分野が進展してきています。精度保証付き数値計算の一つの有力な方法として、有限要素法をベースにした手法がありますが、それには有限要素法の厳密な誤差評価が必要になってきます。現在、空間 2 次元の問題には精度保証付き数値計算の応用が進んでいますが、3 次元の問題への応用はまだまだ進んでいるとは言えません。今後、3 次元の偏微分方程式にも精度保証付き数値計算を適用していくためには、3 次元の有限要素法について精度の良い誤差評価を確立していく必要が高まってきています。

## 2．研究の目的

（1）本研究の第一の目的は、3 次元問題を対象とした有限要素法について、解を高精度に計算するための理論および方法を確立することです。具体的には、有限要素分割を構成する四面体要素などの形状と有限要素法の精度の関係を明らかにすることです。2 次元の三角形分割の場合には、潰れた三角形が含まれても、三角形の潰れ方によっては精度が悪化しないということが知られていました。そこで、同様の性質が 3 次元の場合にも成り立つかどうかを解明し、例えば四面体分割の場合に、どのような形状の四面体が含まれると、どの程度の精度が実現できるのかを明らかにする、というのも研究目的の一つです。また、有限要素法の精度は、要素形状だけではなく、どのような基底関数で解を構成するかにも依存します。そのため、3 次元において、どのような基底を用いればどの程度の精度が実現できるのかを解明することも研究目的となります。

（2）3 次元有限要素法について誤差評価が確立し、それを 3 次元問題の精度保証付き数値計算へ応用することも一つの研究目的です。

## 3．研究の方法

（1）有限要素法の誤差は、関数の補間誤差と密接な関係があることが知られています。特に、特定の関数空間においては、有限要素解の誤差が有限要素上の補間誤差の定数倍で押さえられるということがわかっています。そこで本研究においては、有限要素解の誤差そのものを解析するよりもむしろ、主に有限要素上の補間誤差の解析を行いました。本研究の目的は 3 次元有限要素法についての解析ですが、高次多項式による補間の誤差評価など、2 次元有限要素法についてもまだわかっていない事が色々とあり、そのような問題については 2 次元有限要素法の解析から研究を進めました。

（2）3 次元有限要素法の誤差解析が確立できれば、それを元に 3 次元問題の精度保証付き数値計算にも取り組むことにしました。

## 4．研究成果

本研究の成果を得られた順に記します。なお、引用は全て〔雑誌論文〕の項に記載のものからとなります。

（1）3 次元有限要素法の研究に取り組む前段階として、2 次元有限要素法について研究を行いました。本研究を開始する以前の段階で既に我々は、2 次元の三角形要素に対する一次補間の $p=2$ のソボレフノルムで計った補間誤差が、どんなに三角形が潰れても三角形の外接円の半径で押さえられるということを明らかにしていました。我々は、このような性質は空間次元に関わらず誤差評価において重要な役割を果たしていると考え、研究を進めた結果、外接円を用いる同じタイプの誤差評価を、$1 \leqq p \leqq \infty$ を満たす任意の $p$ に拡張することに成功しました。通常、三角形分割を細かくしていくときに、補間関数の収束を証明するには、三角形の形状について何らかの条件が必要です。しかし、我々の誤差評価はどのような三角形にも適用できるという点で、既存の結果よりも一般的であると言えます。この結果は論文⑤として発表され、この論文に対して日本応用数理学会論文誌 2015 年度論文賞を授与されました。

（2）論文⑤で求めた誤差評価は補間に関する誤差評価であり、特定のノルムで測った場

合の有限要素解の誤差の上界を与えているに過ぎません。しかし我々は、この補間誤差評価がオーダー的に有限要素解の誤差にも極めてよく合致することを数値計算で示しました。さらに、この誤差評価が曲面の面積の定義と密接に関係していることを示しました。これらの結果は論文④として発表されました。

（3）有限要素法では、要素上で一次関数となるような基底関数だけでなく、より高次の多項式を用いた基底関数も用いられています。そのような高次の基底を用いる有限要素法の解析には、対応する補間である高次 Lagrange 補間の解析が重要になってきます。我々は、差分商といわれる概念を用いることにより、論文⑤で得た三角形上の一次補間の誤差評価を、三角形上の高次 Lagrange 補間に拡張することに成功しました。この結果は論文③として発表されました。

（4）我々は、論文③で発表した誤差評価を、さらに一般的な枠組みに拡張しました。その結果、特定の状況の元で、我々の誤差評価の導出方法を四面体要素上の補間誤差評価にも適用できることを見出しました。これにより、3 次元有限要素法について本研究で初めて重要な進展がもたらされました。この結果は論文②として発表されました。この論文においては、四面体の形状にいくらかの制限がありましたが、その後、任意の四面体要素上の Lagrange 補間に適用可能な補間誤差評価を確立することに成功しました。この誤差評価は、四面体の形状に制限が無いという点で非常に画期的であると言えます。三角形要素においては、三角形の外接半径が補間誤差に重要な役割を果たしましたが、四面体の場合には外接球の半径は誤差評価には直接は関係しません。それに対して我々は、四面体について射影外接半径といわれる概念を導入することで誤差評価を得ることができました。これにより、四面体の形状の潰れ方がどのように補間誤差評価に影響を及ぼすかを明らかにすることができました。この結果については、現在、論文として投稿中です。

（5）四面体の潰れ方が、どのように四面体の諸量に影響し、最終的に補間誤差に関係するのかを調べていく過程で、四面体を更に一般化した n 次元単体について興味深い関係式が成り立つことがわかりました。この関係式は、n 次元単体の外接半径を、n 次元単体を構成する n-1 次元単体の体積と外接半径で表すもので、四面体の場合に、補間誤差評価を考える際に一定の役割を果たしました。この結果は論文①として発表されました。

（6）今回、四面体要素について確立した誤差評価を精度保証付き数値計算に応用するには、誤差評価に現れる定数を厳密に評価する必要があります。誤差評価定数の評価はまだ完成していませんが、評価が出来た場合に精度保証付き数値計算に持ち込む方法については研究を進めました。

## ５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計５件）


① Kenta Kobayashi, A recursive formula for the circumradius of the n-simplex, Forum Geometricorum, 査読有, Vol.16, 2016, pp.179-184.
http://forumgeom.fau.edu/FG2016volume16/FG2016index.html

② Kenta Kobayashi and Takuya Tsuchiya, Extending Babuška-Aziz's theorem to higher-order Lagrange interpolation, Applications of Mathematics, 査読有, Vol.61, No.2, 2016, pp.121-133.
DOI: 10.1007/s10492-016-0125-y

③ Kenta Kobayashi and Takuya Tsuchiya, A priori error estimates for Lagrange interpolation on triangles, Applications of Mathematics, 査読有, Vol.60, No.5, 2015, pp.485-499.
DOI: 10.1007/s10492-015-0108-4

④ Kenta Kobayashi and Takuya Tsuchiya, On the circumradius condition for piecewise linear triangular elements, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, Vol.32, No.1, 2015, pp.65-76.
DOI: 10.1007/s13160-014-0161-5

⑤ Kenta Kobayashi and Takuya Tsuchiya, A Babuška-Aziz type proof of the circumradius condition, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, Vol.31, No.1, 2014, pp.193-210.
DOI: 10.1007/s13160-013-0128-y


〔学会発表〕（計１９件）


① 小林健太, 有限要素法の誤差解析と精度保証, Kunitachi One-Day Symposium on the Recent Developments in the Mathematical Science, 2016 年 2 月 6 日, 一橋大学（東京都国立市）.

② Kenta Kobayashi, On the interpolation constants over triangular elements, Applications of Mathematics 2015 (AM2015), Institute of Mathematics, Academy of Sciences, 2015 年 11 月 19 日, プラハ（チェコ共和国）.

③ Kenta Kobayashi, A recursive formula for the circumradius of the n-simplex, Sixth International Conference on Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences (MACIS 2015), 2015 年 11 月 12 日, ベルリン（ドイツ）.

④ 小林健太, 有限要素法の誤差解析と精度保証付き数値計算, 東京理科大学理工学部数学科談話会, 2015 年 10 月 13 日, 東京理科大学（千葉県野田市）.

⑤ 小林健太, n 次元単体の外接半径に関する再帰公式について, 第 44 回数値解析シンポジウム (NAS2015), 2015 年 6 月 10 日,

甲州市勝沼ぶどうの丘（山梨県甲州市）．

⑥ 小林健太，土屋卓也，Babuska-Aziz の定理の高次 Lagrange 補間への拡張，第 44 回数値解析シンポジウム（NAS2015），2015 年 6 月 10 日，甲州市勝沼ぶどうの丘（山梨県甲州市）．

⑦ Kenta Kobayashi，On the interpolation constants over triangular elements，The First French-Japanese Workshop on Numerical Computations（FJWNC 2015），2015 年 3 月 25 日，パリ（フランス）．

⑧ 小林健太，三角形要素上の補間誤差定数について，芝浦工業大学数理科学科談話会，2014 年 11 月 26 日，芝浦工業大学（埼玉県さいたま市）．

⑨ 小林健太，有限要素上の補間誤差定数に関する最近の進展，研究集会:新時代の科学技術を牽引する数値解析学，2014 年 10 月 10 日，京都大学数理解析研究所（京都府京都市）．

⑩ 小林健太，三角形要素上の補間誤差定数について，第３回岐阜数理科学研究会，2014 年 9 月 8 日，飛騨高山まちの博物館（岐阜県飛騨市）．

⑪ Kenta Kobayashi，On the interpolation constants over triangular elements，The Fifth China-Japan-Korea Conference on Numerical Mathematics，2014 年 8 月 26 日，銀川（中華人民共和国）．

⑫ Kenta Kobayashi，On the L2 error estimate for the finite element solution in a non-convex domain，International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2014（INVA2014），2014 年 3 月 15 日，早稲田大学（東京都新宿区）．

⑬ Kenta Kobayashi，L2 error estimate for the finite element solution on the non-convex domains，第 14 回環瀬戸内ワークショップ，2014 年 3 月 10 日，愛媛大学理学部（愛媛県松山市）．

⑭ Takuya Tsuchiya，Error estimation of higher-order interpolation on triangular elements，第14回環瀬戸内ワークショップ，2014 年 3 月 10 日，愛媛大学理学部（愛媛県松山市）．

⑮ 小林健太，非凸領域において解が H2 の滑らかさを持つ場合の有限要素解の L2 誤差評価，北陸応用数理研究会 2014，2014 年 2 月 13 日，金沢大学サテライト・プラザ（石川県金沢市）．

⑯ 小林健太，三次元有限要素法に対する事前誤差評価について，研究集会:応用数理と計算科学における理論と応用の融合，2013 年 10 月 17 日，京都大学数理解析研究所（京都府京都市）．

⑰ 小林健太，有限要素法の誤差解析に関する研究の経緯と今後の課題，京都土曜応用数学サロン，2013 年 7 月 6 日，キャンパスプラザ京都（京都府京都市）．

## ６．研究組織

(1)研究代表者

小林 健太　（KOBAYASHI，Kenta）
一橋大学・大学院商学研究科・准教授
研究者番号：６０４３２９０２

(2)研究分担者

土屋 卓也　（TSUCHIYA，Takuya）
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：　００１６３８３２