様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４００２０３

研究課題名（和文）モデル理論におけるジェネリック構造の研究

研究課題名（英文）Study on generic structures in model theory

研究代表者
桔梗　宏孝（Kikyo, Hirotaka）

神戸大学・システム情報学研究科・教授

研究者番号：８０２０４８２４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：グラフや超グラフを対象の構造とするとき，点の数-α×辺の数を次元と呼ぶ。次元から閉部分構造という概念が定義される。融合性のもとで，与えられた有限構造を貼りあわせてできるジェネリック構造というものがある。それは与えられた構造間の閉部分構造という関係をすべて内部で実現している構造である。境界関数fから決まるKfというクラスがある。αが有理数の場合にKfのジェネリック構造はfのある仮定のもとでモデル完全になる。αが無理数の場合にもいくつかの補題が成り立つ。全融合性と呼ばれる性質をもつ融合クラスのジェネリック構造は任意存在形で公理化できる。有限射影平面を部分構造にもたない無限射影平面が構成できる。

研究成果の概要（英文）：Consider graphs or hypergraphs as structures. We define a dimension of a structure by the number of points - α× the number of edges. With this dimension, we can define a closed substructure. Given a class of finite structures with some property, we can construct a structure called a generic structure by gluing together these structures. A generic structure reflects closed structure relations between finite structures in the given class. There is a class denoted Kf defined with a boundary function f. If α is a rational number, the generic structure will be model complete under some assumption on f. We have some important lemmas in case that α is irrational. There is a notion of the full amalgamation property. If a class has the full amalgamation property then the generic structure can be axiomatised by universal existential sentences. We constructed an infinite projective plane such that it has no finite projective plane as a substructure.

研究分野：数理論理学

キーワード：ジェネリック構造　融合　モデル完全　全融合性　任意存在形　射影平面

## １．研究開始当初の背景

(1) 1988 年にフルショフスキがフレッセの方法をもとに融合法と呼ばれる方法でいくつかの予想に対する反例を構成した。その方法はフルショフスキの融合法と呼ばれている。これは有限構造（一般には有限生成な構造）のクラスがあるとき，そのクラスが融合性などの基本的な性質を満たすときに，それらを一般的に張り合わせていってジェネリック構造と呼ばれる構造が構成される。有限構造の間に「閉部分構造」と呼ばれる関係があるときに，その関係の様子が 1 つの可算構造においてすべて実現されているような構造がジェネリック構造である。この構成法が発見されてからある程度の年月が経つが，その構造はある意味でランダムな様相を呈しており，構造がよくわかっているとは言いがたい。

ジェネリック構造はモデル完全に近い性質をもつことが最初からわかっていたが，フルショフスキが最初に構成した特別な強極小構造のモデル完全性が知られていた程度である。Kf と呼ばれるクラスのジェネリック構造は可算範疇的になるが，実際にこれがどのような構造であるのか，あまりよくはわかっていない。

(2) この研究グループで過去に得られた結果として，全融合性をもつクラスのジェネリック構造は任意存在形の公理系で公理化されるというのがあった。これには多少の仮定が必要であった。また，ジェネリック構造として得られる構造が超安定になる場合は飽和性をもつ場合しか知られていなかったが，桔梗と池田は超安定だが飽和性をもたないジェネリック構造の構成に成功していた。ただし，それは smallness という条件をもたないものであった。

## ２．研究の目的

(1) フルショフスキの融合クラスに対するジェネリック構造のモデル理論的な性質を調べるのが一つの目的である。特に Kf のジェネリック構造のモデル完全性について，成り立つのかどうかを明らかにする。

(2) 構造に対して、飽和や不飽和という概念がある。ジェネリック構造は飽和構造になっていることが多いが、不飽和になることもある。他のモデル理論的な性質（特に，超安定で small という性質をもつこと）と不飽和性が両立するかどうか調べるのがもう一つの目的である。

## ３．研究の方法

(1) 研究代表者と連携研究者である池田は頻繁に研究打ち合わせを行った。月に数回，法政大学市ヶ谷キャンパスにある池田の研究室を訪れ，お互いの考えたことを述べて，議論した。もうひとりの連携研究者である筑波大学の坪井とも年に数回，研究打ち合わせを行った。いずれも，セミナー形式で行った。

(2) 日本数学会の年会，秋季総合分科会，モデル理論の夏季の研究集会，京都大学数理解析研究所の共同研究集会に参加し，連携研究者の池田，坪井を含めたいろいろな研究者と議論を行って，研究の参考にした。

(3) 2015 年 12 月に京都大学数理解析研究所で開催された RIMS 研究集会「モデル理論における独立性概念と次元の研究」の研究代表者を務めた。韓国延世大学の Byunghan Kim 教授やイギリスの Charlotte Kestner 講師を招いて，研究打ち合わせを行った。

(4) 外国で開催された国際研究集会に参加し，海外の研究者とも議論を行った。参加した海外の研究集会は次の通り。

MSRI Workshop Model Theory in Geometry and Arithmetic，2014 年 5 月 12 日-16 日，Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley，CA，米国

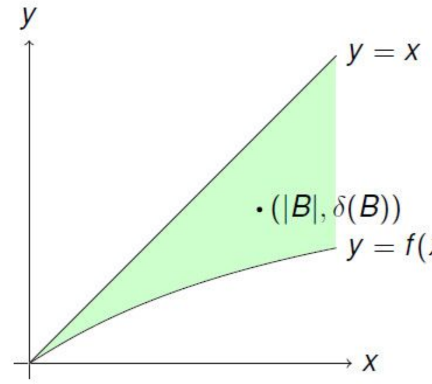
Model theory, Difference/Differential Equations and Applications，2015 年４月７日-10 日，CIRM，Luminy，Marseille，フランス

## ４．研究成果

(1) フルショフスキの導入した Kf に関する成果がいくつかある。対象となる構造 A が 3 超グラフで，次元関数δが

$$\delta(A) = |A| - e(A)$$

で与えられるとする。ここで，|A|は A の頂点の個数，e(A)は A の超辺の個数である。普通のグラフは，２つの頂点を結ぶものが辺であるが，「辺」を一般化して，3 つの頂点を結ぶ「辺」を考える。ここで考えたのは無向グラフと同様に，3 つの頂点が１つの「超辺」で結ばれるかどうかだけを考えている。さて，構造 A が Kf にはいる必要十分条件は A の任意の部分構造 B に対し，$\delta(B) \geqq f(|B|)$ となることである。領域を図示すると次のようになる。

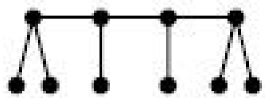


f は領域の下の境界を表している対数関数に似た関数である。すなわち，f は単調増加，上に凸，上に有界でない。さらに $f(x)+1 \geqq f(2x)$ と仮定する。
この仮定のもとで，Kf は融合クラスと呼ばれるものになり，またその要素を一般的に張り合わせて構成されるジェネリック構造はモデル完全になることが証明できた。このあとの結果を考えると，次元関数の e(A) の係数を 0 と 1 の間の有理数に変えても同様のことが成り立つと考えられる。
この結果は①の論文で公表している。

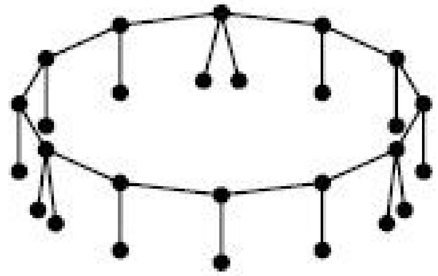
(2) Kf の要素となる構造が，普通のグラフ(2 項グラフ)の場合を考える。次元関数は

$\delta(A) = |A| - \alpha e(A)$

で与えられるとする。|A|は A の頂点の個数で，e(A) は A の辺の個数である。また，α は $0 < \alpha < 1$ となる実数である。さらに，α が有理数で，$\alpha = m/d$（既約分数)，$f(x)+1/d \geqq f(2x)$ であると仮定する。このとき、Kf は融合クラスになり，またそのジェネリック構造はモデル完全になることが証明できた。
この $f(x)+1/d \geqq f(2x)$ という仮定は，相対的な次元が正のときという条件と関係している。α が m/d という既約分数で表されるとき，δ次元の差の正の最小値は 1/d である。クラス Kf が融合クラスになるための自然な十分条件がこの f に関する条件になる。
証明の核心部分について述べる。ある種の 0 拡大，すなわちδ次元を変えずに，ほとんど閉部分構造になるような拡大が豊富に構成できることが一つの重要な部分であった。A が辺のないグラフのときに，A の拡大 B で，次のようなものが構成できた。
$\delta(A) = \delta(B)$であり，
$A \subset X \subset B$ で X が A と B のいずれとも異なるときは $\delta(A) < \delta(X)$.
$\alpha = 4/9$ のとき次のグラフが 0 拡大を与える部品である。



下の 6 点が A で全体が B である。A に対し B には 4 点と 9 つの辺が加わっている。δ次元を考えると，4 を加えて，9×4/9 を引く計算になるので，相対的にδ次元は変わらない。また，真の部分で拡大になっているものをとるとδ次元は増えることもわかる。
この木の形の部品を任意に複数個用意して輪の形につなげたものも，同様の性質をもつ。次の図は 3 つで輪を作ったものである。
これらの部品でグラフを拡大していくと大きさは増えるがδ次元は変わらない。すると，いずれ境界に近いところでそれ以上同様の拡大をすると領域から出てしまうところ



に来る。
この拡大で難しいのは，部分構造もすべてこの領域内にとどまることを示さなければならないところにある。そのため，拡大に使うグラフはかなりバランスのとれたものである必要がある。
こうして得られた境界付近にあるグラフは，Kf の中で拡大をすると必ず閉部分構造になることがわかるのである。詳しいことは説明できないが，このことからモデル完全性が導かれる。
以上の結果は現在投稿中である。

(3) クラス Kf の難しさは，領域内の点 (x,y)を選んだときに，$|A| = x$，$\delta(A) = y$ となる $A \in Kf$ があるかどうかが明らかでない点にある。
α が無理数の場合についての考察も行っている。フルショフスキの最初の例は，α が無理数であった。まず，δ次元の差が正で最小ということは不可能であるが，フルショフスキの例における関数 f が満たす性質を抜き出すと，Kf は一般に融合性をもつようになる。
α が無理数の場合は 0 拡大が存在しないが，近似物の存在は言える。有理数の場合の極小の 0 拡大は，極小の固有拡大と考えることができる。すなわち，A は B の真部分構造においては閉構造であるが，B 全体では A が閉であることが崩れる。この意味では，無理数の場合も存在する。
無理数を下から有理数で近似する。分母の最大値を予め決めてから下からの最良の有理数による近似を考えて，その有理数における(2)で得られている 0 拡大を作る部品を作成する。すると，全体は負の拡大であるが、途中はすべて正の拡大になっていることがわかる。点や辺の数は有理数を既約分数で表したときの分母の大きさにかなり依存して決まるので，大きなグラフで構成することも可能である。
一方で，もう一工夫すると A と B のδ次元がほぼ同じで，B の中で A が閉になるような拡大 B の存在も言える。この「ほぼ同じ」の評価について，もう少し厳密に調べないとならないようである。この 2 つの事実を駆使すれば Kf のジェネリック構造のモデル完全性も導かれそうに思われるが，細かいところでまだ成功していない。

(4) 全融合性(full amalgamation property)という概念がある。構造A，B，C がクラスKに属し，A が B の中で閉，CがAの拡大のとき(AはCの中では閉でなくてもよい)，A上BとCを自由に融合した構造もKにはいるという性質である。融合クラスが全融合性をもつとき，ある仮定のもとでそのジェネリック構造が任意存在形で公理化可能であることを過去に得ており，よい雑誌に掲載されているが，全融合性の仮定だけで，任意存在形の公理化が可能であることが証明できた。

(5) 全融合性をもつ融合クラスに対するジェネリック構造はモデル完全にならないことが知られている。池田との共同研究で，ジェネリック構造がモデル完全にならないための必要十分条件を得ている。この条件は融合クラスに関する条件である。それは全融合性をかなり弱めた条件になっている。

(6) 融合クラスを工夫するとジェネリック構造として可算な射影平面が得られる。ボールドウィンの構成した射影平面を修正することにより，有限射影平面をまったく含まない可算な射影平面を構成できた。このような例はたくさんあると思われる。

(6) Kfのジェネリック構造は難しいと考えられているようである。この研究で開発した部品は，Kfの中でかなり具体的に構造を構成する方法を与えている。可算構造の自己同型群が群論の方でも注目されはじめているので，この研究で開発した部品が，自己同型群の研究にも役に立つことが期待される。次の課題として考えているところである。

## ５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２件）


① Koichiro Ikeda, Hirotaka Kikyo, Model complete generic structures, Proceedings of the 13th Asian Logic Conference, 査読有り, 2015, pp. 114-123

② Hirotaka Kikyo, Model complete generic graphs I, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無し, vol.1938, 2015, pp. 15-25


〔学会発表〕（計　１０件）


① 桔梗宏孝, 可算な射影平面の構成について, 2016年日本数学会年会, 2016年3月16日～3月19日, 筑波大学(茨城県･つくば市)

② Hirotaka Kikyo, Model completeness of generic structures for Kf, RIMS Workshop 2015, Model theoretic aspects of the notion of independence and dimension, 2015年12月14日～12月16日，京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）

③ 桔梗宏孝，ジェネリックグラフのモデル完全性：無理数係数の場合，2015年日本数学会秋季総合分科会，2015 年 9 月 13 日～9 月 16 日，京都産業大学（京都府・京都市）

④ 桔梗宏孝，Model complete generic graphs I，2015年日本数学会年会，2015年3月21日～3月24日，明治大学（東京都・千代田区）

⑤ 池田宏一郎，桔梗宏孝，モデル完全でないジェネリック構造，2015年日本数学会年会，2015年3月21日～3月24日，明治大学（東京都・千代田区）

⑥ 桔梗宏孝，On model complete generic structures, RIMS Workshop 2014: Model theoretic aspects of the notion of independence and dimension，2014年11月25日～27日，京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）

⑦ 桔梗宏孝，On model complete generic structures，2014年日本数学会秋季総合分科会，2014年9月25日～9月28日，広島大学（広島県・東広島市）

⑧ 池田宏一郎，桔梗宏孝，モデル完全なジェネリック構造I，2014年日本数学会年会，2014年3月15日～18日，学習院大学（東京都・豊島区）

⑨ 桔梗宏孝,池田宏一郎,モデル完全なジェネリック構造II，2014年日本数学会年会，2014年3月15日～18日，学習院大学（東京都・豊島区）

⑩ 桔梗宏孝，On generic structures with a model complete theory, RIMS Workshop 2013: Model theoretic aspects of the notion of independence and dimension, 2013年11月18日～20日,京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）


〔その他〕
ホームページ等
http://www2.kobe-u.ac.jp/~kikyo/kaken/

## ６．研究組織
(1)研究代表者
　桔梗　宏孝（KIKYO, Hirotaka）
　神戸大学・大学院システム情報学研究科・教授
　研究者番号：８０２０４８２４

(2)研究分担者
　なし

(3)連携研究者

池田　宏一郎（IKEDA, Koichiro）
法政大学・経営学部・教授
研究者番号：６０３３２０２９

坪井　明人（TSUBOI, Akito）
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・教授
研究者番号：３０１８００４５