1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２２ 日現在

機関番号：１４６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４００２０４
研究課題名（和文）行列多項式の理論とその応用に関する研究

研究課題名（英文）Study on matrix polynomial theory and its applications

研究代表者
伊藤　直治（Ito, Naoharu）

奈良教育大学・教育学部・教授

研究者番号：９０２４６６６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：自己反転行列多項式について考察し，もし付随する行列多項式の内数域半径が1よりも大きいならば，その固有値は正規かつ半単純で，単位円周上にあることを示した．また，付随する特性行列多項式が自己反転的であるような高階線形差分方程式系について考察し，その特性行列多項式を構成する行列多項式の内数域半径が1より大きいならば，すべての解は有界であることを示した．さらに，安定有界性に対する判定基準を与えた．次に，ヒルベルト空間上の自己反転作用素多項式について考察し，もし付随する作用素多項式の内数域半径が1より大きいならば，そのスペクトルは単位円周上にあり，近似正規であることを示した．

研究成果の概要（英文）：The spectrum of a class of self-inversive matrix polynomials was studied. It was shown that the characteristic values are normal, semisimple and lie on the unit circle if the inner radius of an associated matrix polynomial is greater than one. Then, we investigated higher order systems of linear difference equations where the associated characteristic matrix polynomial is selfinversive. We showed that all solutions are bounded if the inner radius is greater than one. In the case of matrix polynomials with positve definite coefficient matrices we derived a computable lower bound for the inner radius and we obtain a criterion for stable boundedness. Next, Hilbert space operator polynomials with self-inversive structure were studied. It was shown that if the inner numerical radius of an associated polynomial is greater than or equal to one then the spectrum lies on the unit circle and consists of normal approximate characteristic values.

研究分野： 応用数学

キーワード： 行列多項式　高階差分方程式　作用素多項式　自己反転多項式　数域　内数域半径　固有値

１．研究開始当初の背景

行列多項式に関する研究の重要性は明らかであると考えられるが，明確に行列多項式について研究されたのは比較的遅く，1938年の Frazer, Duncan および Collar の文献[R. A. Frazer, W. J. Duncan and A. R. Collar, Elementary matrices, Cambridge University Press (1938)]がはじめではないかと思われる．1966 年に，まとまった結果が Lancaster によって発表されている[P. Lancaster, Lambda-matrices and Vibrating Systems, Pergamon, Oxford (1966)]. いずれも振動系の解析を行列多項式の研究の動機としている．その後，行列多項式に関する理論は，応用線形代数の重要な課題として精力的に研究がなされ，得られた成果は微分・差分方程式，境界値問題，Wiener-Hopf 法，システム制御理論，振動解析，ネットワーク理論，複数時系列のフィルタリング，数値解析など，様々な分野に応用されている[I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman, Matrix Polynomials, Society for Industrial and Applied Mathematics (2009)].

近年，高速列車に対する線路の振動解析，3 次 Schrödinger 方程式に対する離散化スキームの研究，離散時間線形最適制御問題の解析などにおいて用いられる高階線形差分方程式系に付随する行列多項式が自己反転性をもっていることが分かり，応用上重要な研究課題となっている．

自己反転行列多項式の研究は Mackey ら［D. St. Mackey, N. Mackey, Ch. Mehl, and V. Mehrmann, Structured polynomial eigenvalue problems: good vibrations from good linearizations, SIAM J. Matrix Anal. Appl., Vol.28 (2006), pp.1029-1051］によって始められ，その後，Smith 形，数値計算およびアルゴリズムなどについて考察されている（たとえば，文献［B. Iannazzo and B. Meini, Palindromic matrix polynomials, matrix functions and integral representations, Linear Algebra Appl. Vol.434 (2011), pp.174-184］を参照）．

そこで，研究代表者は，自己反転行列多項式に関する研究課題について研究協力者（Wimmer 教授，Universität Würzburg, Germany）と議論を重ね，共同で研究を行うこととなった．

２．研究の目的

本研究の目的は，自己反転行列多項式に関する Eneström-Kakeya 型の定理を与え，その結果を自己反転行列多項式に付随する高階線形差分方程式系の有界性および安定有界性の解析に応用することである．

行列多項式に対する Eneström-Kakeya 型の定理については，研究協力者の Wimmer 教授による先駆的な研究［Harald K. Wimmer, Polynomial matrices with hermitian coefficients and a generalization of the Eneström-Kakeya theorem, Operators and Matrices, Vol.2, No.3, pp.443-454 (2008)］があるが，本研究はそれをさらに発展させ，自己反転行列多項式に対する Eneström-Kakeya 型の定理を確立するという点およびその結果を高階線形差分方程式系の解析に応用するという点に特色がある．

また，Eneström-Kakeya 型の定理については，より一般的な拡張を考える．具体的には，複素 Hilbert 空間上の作用素多項式の場合について Eneström-Kakeya 型の定理を導出し，その応用について考察する．

３．研究の方法

まず，自己反転行列多項式に関する Eneström-Kakeya 型の定理を考察した．係数行列がエルミートかつ正定で，ある種の構造をもつ場合について調べると共に，より一般的な自己反転行列多項式の場合を調べた．

自己反転多項式に関する Eneström-Kakeya 型の定理については，文献［K. Chinen, An abundance of polynomials satisfying the Riemann hypothesis, Discrete Math., Vol.308 (2008), pp.6426-6440］の結果が知られているが，この結果と共に Schur の論文［J. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, J. reine angew. Math., Vol.147 (1917), pp.205–232］の手法を調べ，自己反転行列多項式の場合に応用した．また，具体的な数値例の計算を積み重ねて考察を行った．

次に，自己反転行列多項式について得られた成果を高階線形差分方程式系に応用し，解の有界性および安定有界性について考察した．高階線形差分方程式系の安定性は，対応する行列多項式の固有値によって決まる．特に，対応する行列多項式の固有値が単位円周上にあり，かつすべて半単純であるならば，すべての解は両時間方向に有界である．したがって，対応する行列多項式が自己反転的であるとき，数域の内半径を用いて解の有界性の規範を与えることができる可能性があると思われる．

また，多くの応用において，差分方程式系によって表される現象は，不確かさをもつ．したがって，安定性と有界性は小さな摂動の下では保存されることが望まれる．そこで，自己反転的構造をもつ高階線形差分方程式系の安定有界性を調べ，内数域半径を用いて，正定値係数行列をもつ差分方程式系の安定有界性に関する規範を導いた．

さらに，以上の成果を踏まえ，Hilbert 空間上の自己反転作用素多項式に関する Eneström-Kakeya 型の定理を考察した．作用素多項式の数域については，文献［F. O.

Farid, On the numerical range of operator polynomials, Linear Multilinear Algebra, Vol.50 (2002), pp.223-239］など調べた．できるだけ一般的な形で考察する一方で，具体例の計算も行った．

研究協力者とは，適宜，連絡を取り合い，研究課題について議論した．また，研究協力者を本学に招き，研究集会を開くなど，様々な形で研究討議を行い，研究成果の取りまとめを行った．

４．研究成果

(1)　自己反転行列多項式に関する Eneström-Kakeya 型の定理については，より一般的な次の結果が得られた：与えられた自己反転行列多項式を構成する行列多項式成分の内数域半径が１以上ならば，自己反転行列多項式のすべての固有値は単位円周上にあり、正規である．さらに，自己反転行列多項式を構成する行列多項式成分の内数域半径が１よりも大きければ、自己反転行列多項式のすべての固有値は半単純である．

これらの結果の系として，係数行列がエルミートかつ正定である自己反転行列多項式である場合について，Eneström-Kakeya 型の定理を得た．

(2)　上記の(1)の結果を高階線形差分方程式系に応用し、次の結果を得た：与えられた高階線形差分方程式系に付随する自己反転行列多項式を構成する行列多項式成分の内数域半径が１より大きければ，差分方程式系は有界である．

さらに，差分方程式系が安定有界であるための判定基準を与えた．また，行列多項式に関しては，その係数がエルミートかつ正定である場合について，内数域半径の計算可能な下界を与えた．

以上の結果は，日本数学会秋季総合分科会において発表した［伊藤直治，高階線形差分方程式系の解の有界性について，日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 応用数学分科会, 2013 年 9 月 27 日］。

(3)　上記の(1)の結果を Hilbert 空間上の作用素多項式の場合に拡張し，次の成果を得た：与えられた Hilbert 空間上の自己反転作用素多項式を構成する作用素多項式成分の内数域半径が１以上ならば，自己反転作用素多項式のスペクトルは単位円周上にあり、かつ近似正規である．

さらに，与えられた自己反転作用素多項式を構成する作用素多項式成分が１次である場合については，自己反転作用素多項式のスペクトルを具体的に与えるなど，より詳細な結果を示した．また，その結果を片側無限数列上の左シフト作用素に適用した結果を与えた．

以上の結果は，学術雑誌［Naoharu Ito, Harald K. Wimmer, Self-inversive Hilbert space operator polynomials with spectrum on the unit circle, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.436, 2016, pp.683–691］および日本数学会年会［伊藤直治，単位円周上にスペクトルをもつ自己反転作用素多項式に関する一考察，日本数学会 2016 年度年会，応用数学分科会，2016 年］において発表した．

(4)　上記の問題を考察するなかで、Bezout 整域上の一般化 Sylvester 方程式に関する成果を得ることができた。一般化 Sylvester 方程式については Roth の結果が良く知られているが、これは階数最小化の枠組みでとらえることができ、Bezout 整域上の行列の場合について階数最小化に関する結果を与えた．

以上の成果は，日本数学会年会で発表した［伊藤直治，Bezout 整域上の一般化 Sylvester 方程式に関する一考察，日本数学会 2014 年度年会, 応用数学分科会, 2014 年］。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
① Naoharu Ito, Harald K. Wimmer, Self-inversive Hilbert space operator polynomials with spectrum on the unit circle, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有, Volume 436, Issue 2, 15 April 2016, Pages 683–691 doi:10.1016/j.jmaa.2015.11.072

〔学会発表〕（計３件）
① 伊藤　直治, 単位円周上にスペクトルをもつ自己反転作用素多項式に関する一考察，日本数学会 2016 年度年会，応用数学分科会，2016 年 3 月 19 日
② 伊藤　直治，Bezout 整域上の一般化 Sylvester 方程式に関する一考察，日本数学会 2014 年度年会，応用数学分科会，2014 年 3 月 17 日
③ 伊藤　直治, 高階線形差分方程式系の解の有界性について，日本数学会 2013 年度秋季総合分科会，応用数学分科会，2013 年 9 月 27 日

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等
なし

６．研究組織
(1)研究代表者
伊藤　直治（Ito，Naoharu）
奈良教育大学・教育学部・教授
研究者番号：　９０２４６６６１

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
H. K. Wimmer（Universität Würzburg, Germany）