様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ３１ 日現在

機関番号：２４４０３

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2013～2017

課題番号：２５４００２０７

研究課題名（和文）強制法と巨大基数による集合論的位相空間論の深化

研究課題名（英文）Deepening of the research in set-theoretic topology with forcing and large cardinal properties

研究代表者

嘉田　勝（Kada, Masaru）

大阪府立大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：００３１２４４７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究の開始後に、当初想定できなかった研究遂行の障害が複数件生じ、当初想定していた研究方法の大幅な縮小を余儀なくされ、特に、主題として設定した「巨大基数公理を用いた集合論の手法による位相空間論へのアプローチ」については、特筆すべき成果を挙げられなかった。その一方、本研究の遂行の過程で派生的に生じた、「(1) 点列の集合への収束とコーエン強制」「(2) 和集合公理を除いた集合論の公理系における、種々の選択公理関連命題の強弱関係」「(3) 囚人の帽子パズルの無限集合への一般化」の3点の集合論および位相空間論の問題については、興味深い成果が得られており、今後の研究の進展も期待できる。

研究成果の概要（英文）：After the start of this project, several non-academic difficulties for research activities happened, which caused the delay of the project and brought less results than I expected. In particular, I could not get a significant progress in the field of general topology using the set-theoretic method of large cardinal properties, which was one of the main topic I mentioned in the proposal. However, I got several meaningful results in the field of set theory and general topology, including the following topics: (i) Convergence of a sequence to a set after forcing extensions, (ii) Interplay among variants of the axiom of choice when we discard the axiom of union, and (iii) Generalizations of hat-guessing games into infinitary combinatorics.

研究分野：数理論理学

キーワード：集合論　位相空間論　強制法　巨大基数公理　数理論理学　無限組合せ論

１．研究開始当初の背景

公理的集合論における 20 世紀の最大の成果は、コーエンによる連続体仮説の独立性証明である。コーエンは 1963 年に、連続体仮説は集合論の標準的な公理系（ZFC）から独立であることを証明した。コーエンはこの証明のために強制法（forcing）と呼ばれる手法を開発したが、その後に強制法の理論は飛躍的に発展し、今日では公理的集合論の研究に不可欠の手法となっている。

また、連続体仮説の解決に向けての取り組みの中で、「巨大基数公理が連続体仮説の真偽を決定するのではないか」という問題意識が生じ、集合論の公理系に巨大基数公理を追加して得られる、より強力な集合論の体系についての研究が発展した。巨大基数公理は実は連続体仮説の真偽を決定しないが、実数直線の位相的・測度論的構造に関する問題をはじめ、多くの集合論の重要な問題が巨大基数公理を用いて解決されており、巨大基数公理を積極的に用いた集合論の研究手法も、今日の公理的集合論の研究では不可欠である。

集合論的位相空間論の研究においては、ZFC から独立であると予想される命題にしばしば行き当たるが、実際に独立性を証明するには、強制法が不可欠である。さらに、問題によっては、ZFC に立脚した強制法だけでなく、巨大基数公理を仮定したより強力な集合論に立脚した強制法が必要である。

本研究は、集合論独自の手法と集合論的位相空間論の両方に精通した研究者が国内に少ない中、集合論の立場から集合論的位相空間論の研究に参入し、強制法と巨大基数を積極的に利用することで、新たな研究の発展や深化を図ろうと目論んだものであった。

２．研究の目的

先ほど述べた研究の背景に鑑み、本研究は、集合論的位相空間論における諸問題のうち、特に次のふたつのテーマを設定し、公理的集合論の強力な研究手法である強制法と巨大基数理論を駆使して、未解決問題の解決とさらなる研究の深化を目指すこととした。

(1) 強制拡大によって保存される（壊される）位相的性質の分析
(2) 位相空間の局所的特徴が空間全体の集合論的性質に及ぼす影響

３．研究の方法

本研究を遂行するため、すでに本研究課題に関連する研究の実績を持つ渕野昌氏、吉信康夫氏、薄葉季路氏、友安一夫氏に連携研究者として研究への参加を求め、連携研究者との研究情報交換や集中的な討論を行いつつ研究を進める計画であった。

４．研究成果

本研究の開始後に、当初想定できなかった研究遂行の障害となる出来事が多く生じた。まず、連携研究者の一人で巨大基数の理論に長けた薄葉季路氏が神戸大学から早稲田大学に転任したことで、研究代表者との頻繁な討論によって研究の進展を図るという当初の目論見が困難になった。また、研究代表者が研究 1 年目の途中に健康状態悪化に見舞われ、回復に予想外に長い期間を要したため、長期の出張や海外の研究者との討論が困難になり、当初想定していた研究方法の大幅な縮小を余儀なくされた。これらの事情により、特に主題として設定した「巨大基数公理を用いた集合論の手法による位相空間論へのアプローチ」については、特筆すべき成果を挙げられなかった。その一方、本研究の遂行の過程で派生的に生じた、いくつかの集合論および位相空間論の問題については、興味深い結果が得られており、今後の研究の進展も期待できる。この節では、それらの研究成果を報告する。

(1) 点列の集合への収束とコーエン強制

「2. 研究の目的」の(1)に挙げた「強制法によって位相空間の種々の性質が保存されるか破壊されるか」という問題意識は、強制拡大において特殊な性質を備えた位相空間を構成するための重要な手段である。ここで、基底モデルに存在する位相空間の強制拡大における対応物としては、点集合は同一で、位相は基底モデルと共通の開基から生成される位相を考える。

点列の点への収束は、開基によってのみ決定されるので、強制法によって必ず保存される。しかし、収束の概念を拡張して「点列が集合 A に収束する」ことを「集合 A を包む任意の開集合に、点列の有限個を除くすべての点が属する」と定義すると、この性質は強制法で保存されるとは限らない。

本研究代表者は、研究協力者である岩佐明氏、加茂静夫氏と共同でこの問題を検討し、強制拡大のうちで最も基本的なケースであるコーエン拡大について、点列の集合への収束が保存される場合の、点列と集合が基底モデルでみたすべき必要十分条件を見出した。

この研究テーマに関連して得られた主要な結果を述べる。位相空間の部分集合が scattered であるとは、孤立点を除去する操作を超限回施すことで空集合に到達することを意味する。

定理 [雑誌論文① Theorem 3.3]
完全正則な位相空間（チコノフ空間）X の中にある点列$\{x_n\}_n$ が X のコンパクト部分集

合 K に収束しているとき、次の条件は互いに同値である。

(1) いかなる強制半順序 P を用いた強制拡大モデル V^P においても、点列 $\{x_n\}_n$ は依然として集合 K に収束する。
(2) コーエン実数を付加する強制半順序 $Fn(\omega,2)$ による強制拡大モデル $V^{Fn(\omega,2)}$ において、点列 $\{x_n\}_n$ は依然として集合 K に収束する。
(3) 点列 $\{x_n\}_n$ の閉包 $cl(\{x_n\}_n)$ が scattered 集合である。

定理 [雑誌論文① Theorem 4.3]
完全正則な位相空間（チコノフ空間）X の点列 $\{x_n\}_n$ が次の条件をみたすとする。

(1) $\{x_n\}_n$ はなんらかの集合に収束する。
(2) $\{x_n\}_n$ の閉包 $cl(\{x_n\}_n)$ は scattered 集合ではない。

このとき、可算鎖条件をみたす強制半順序 P を、強制拡大モデル V^P では点列 $\{x_n\}_n$ がその集合に収束しないように、構成できる。

(2) 和集合公理を除いた集合論の公理系における、種々の選択公理関連命題の強弱関係

集合論の標準的な公理系である ZFC から和集合公理を除いた体系を考えたとき、ほかの公理を用いて和集合の構成操作をどの程度再構築できるかを研究した論文として、Oman の 2010 年の論文がある。[G. Oman. On the axiom of union. Arch. Math. Logic, Vol. 49, pp. 283-289, 2010.] しかし、Oman の論文に示されている結果の多くは選択公理に依存しているため、選択公理なしの集合論の公理系 ZF から和集合公理を除いた体系では、これらの結果の多くが失われると考えられる。また、通常の選択公理なし集合論の体系では選択公理には多くの同値な別の表現が存在するが、和集合公理を除いた集合論ではそれらが同値である保証がなく、「選択公理」として採用する命題の表現によっては Oman の結果の一部は証明できない可能性がある。

これらの問題を明らかにするため、研究期間中に研究代表者が指導していた大学院生である加藤匠人氏と協力して、ZF から和集合公理を除いた体系における、選択公理に類似する命題の強弱関係を調べた。当初は「それらの命題は大きく二つの強さの階層に分類されて、それぞれの類に属する命題どうしは同値性が証明できる」と予想したが、実はそれも明らかでなく、さらに細かな強さの階層が生じる可能性があることが分かった。また、本研究期間中に得られた成果は和集合公理なしで同値性が証明できる部分の確認にとどまり、実際に強さが真に異なることを示す無矛盾性結果は得られなかった。次に示す定義および定理の詳細は[雑誌論文③]を参照されたい。

定義 F は空集合を要素にもたない集合族を表すとする。
AC: F の選択関数が存在する.
UACS: F が互いに交わらない集合族で, ∪F が存在するならば, F の選択集合が存在する.
UAC: ∪F が存在するならば, F の選択関数が存在する.
PAC: 任意の集合 X について, $P(X)-\{\varnothing\}$の選択関数が存在する.
IAC: 集合 Y が存在して, すべての $X\in F$ について X から Y への単射が存在するならば, F の選択関数が存在する.
BAC: $\{|x| : x\in F\}$ が上界をもつならば, F の選択関数が存在する.
BU: $\{|x| : x\in F\}$ が上界をもつならば, ∪F が存在する.

定理 [雑誌論文③ 定理 4.10]
ZF から和集合公理を除いた体系で、次の命題はすべて同値である。

(1) UACS
(2) UAC
(3) PAC
(4) 整列定理
(5) タッキーの補題
(6) ハウスドルフの極大原理
(7) ツォルンの補題

Oman の主結果は「ZF＋IAC－和集合公理から BU が証明できる」ことになっている。ここで IAC が UAC を導くことは明らかだが、逆が ZF－和集合公理のもとで証明できるかどうかは未解決である。したがって、次の問題が依然として残っている。

問題 [雑誌論文③ 問題 5.1]
ZF＋UAC－和集合公理から BU を証明できるか？

(3) 囚人の帽子パズルの無限集合への一般化

「囚人の帽子パズル」とは、「二人が黒白いずれかの色の帽子を被せられて、自分の帽子は見えないが他人の帽子は見える状態で、自分の帽子の色を言い当てる、ただし、二人は帽子を被せられた後は一切情報伝達できないが、事前に戦略を協議できる、少なくとも一人が正しく言い当てるにはどのような戦略で臨めばよいか？」という類の組合せ論理パズルの総称である。このパズルについて、プレイヤーの数を無限基数に拡張する、各プレイヤーの視界に制限を加えるなど、さまざまな一般化を施すことで、集合論における無限組合せ論の既存の結果と関連する興味深い結果が得られていて、それらの結果の多くは Hardin と Taylor によってモノグラフにまとめられている。[C. S. Hardin and A. D. Taylor. The mathematics of coordinated inference. Springer, 2010.]

本研究期間中に、研究代表者が指導してい

た大学院生の静間荘司氏と協力して、Hardin と Taylor のモノグラフに収録された結果とその証明を分析して、いくつかの結果は証明を洗練することでより強い結果に改良できることを示した。

本研究期間中に得られた成果の詳細は、雑誌論文④の Theorem 6 および Theorem 14 を参照されたい。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4 件）

① Akira Iwasa, Masaru Kada and Shizuo Kamo. Preservation of convergence of a sequence to a set. Topology Proceedings, Vol. 44 (2014), Pages 97-105. 査読あり.

② 嘉田勝. バビロンの流れのほとり：ω のコンパクト化が定める実数集合. 集合論的及び幾何学的トポロジーの現状とその展望（数理解析研究所講究録 1884）. Pages 98-106. 2014. 査読なし.

③ 嘉田勝, 加藤匠人. Variants of AC under ZF minus union. 公理的集合論の最近の進展(数理解析研究所講究録 1988). Pages 31-42. 2016. 査読なし.

④ 嘉田勝, 静間荘司. Some remarks on infinite hat guessing games. 公理的集合論の最近の進展（数理解析研究所講究録 1988）. Pages 43-54. 2016. 査読なし.

〔学会発表〕（計　5 件）

① Masaru Kada. How many miles to βω, after all? Boise Extravaganza in Set Theory (BEST 2013). University of Nevada, Las Vegas, USA. 2013-06-16. 招待講演.

② Masaru Kada. Small sets of reals determined by compactifications of ω. 位相数学・微分幾何学国際会議兼第 6 回日本・メキシコ位相 数学合同シンポジウム. 島根大学（松江市）. 2013-09-03. 招待講演.

③ 嘉田勝. バビロンの流れのほとり：ω のコンパクト化が定める実数集合. 集合論的及び幾何学的トポロジーの現状とその展望（RIMS 研究集会）. 京都大学数理解析研究所（京都市左京区）. 2013-10-18.

④ Masaru Kada and Takuto Kato. Variants of AC under ZF minus union. 公理的集合論の最近の進展（RIMS 研究集会）. 京都大学数理解析研究所（京都市左京区）. 2015-09-16.

⑤ Masaru Kada and Souji Shizuma. Some remarks on infinite hat guessing games. 公理的集合論の最近の進展（RIMS 研究集会）. 京都大学数理解析研究所（京都市左京区）. 2015-09-16.

〔図書〕なし

〔産業財産権〕なし

〔その他〕

ホームページ等

https://researchmap.jp/kada/科研費研究成果（基盤 C:25400207）

６．研究組織

(1)研究代表者

嘉田　勝　（Masaru Kada）

大阪府立大学・理学系研究科・准教授

研究者番号：00312447

(2)研究分担者

なし

(3)　連携研究者

吉信康夫　(Yasuo Yoshinobu)

名古屋大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：90281063

友安一夫　(Kazuo Tomoyasu)

都城工業高等専門学校・一般科目・准教授

研究者番号：10332107

渕野昌　(Sakaé Fuchino)

神戸大学・システム情報学研究科・教授

研究者番号：30292098

薄葉季路　(Toshimichi Usuba)

早稲田大学・理工学術院・准教授

研究者番号：10513632

(4)研究協力者

岩佐　明 (Akira Iwasa)

加茂　静夫 (Shizuo, Kamo)

加藤　匠人 (Takuto Kato)

静間　荘司 (Souji Shizuma)