

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400210

研究課題名(和文)再生核理論を用いたソボレフ不等式の最良評価とその応用

研究課題名(英文) Best evaluation of the Sobolev inequality using the reproducing kernel theory and its applications

研究代表者

武村 一雄 (TAKEMURA, Kazuo)

日本大学・理工学部・准教授

研究者番号：60367216

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主題は、ソボレフ不等式の最良評価(最良定数、最良関数計算)を求めることである。連続版のソボレフ不等式においては、トムソンケーブルの連続版と $2M$ 階微分作用素(低階項なし)に対する自由端条件のそれぞれの場合について、ソボレフ不等式の最良評価を得た。連続版ソボレフ不等式の最良評価と並行して進めてきた離散版ソボレフ不等式の最良評価については、メビウスのはしご、 C_{60} フラーレンバッキ-ボール、切頂正 $4, 6, 8$ 面体、テブリッツグラフのそれぞれについて、離散ソボレフ不等式の最良評価を得た。こうした結果は今後のソボレフ不等式の最良評価を行う上で、足がかりとなる重要な結果といえる。

研究成果の概要(英文)：The subject of this research is to obtain best evaluation of a Sobolev inequality. In continuous version, we have treated of Thomson cable (a continuous model) and a free boundary value problem for a $2M$ -th order operator (no lower terms). In discrete version, we have treated the Mobius ladder, C_{60} fullerene buckyball, the truncated regular M -hedron ($M=4,6,8$) and the Toeplitz graph. In each case, we have computed a best constant and family of best functions for the Sobolev inequality. These are important results to become the clue in studying the future Sobolev inequality.

研究分野：微分方程式論

キーワード：ソボレフ不等式 最良定数

1. 研究開始当初の背景

本研究のキーワードであるソボレフ不等式は現代的微分方程式論の中核をなす不等式である。しかし、その一方でソボレフ不等式の最良評価(最良定数, 最良関数計算)については、1930年にG. Bliss, 1976年にG. Talenti, T. Aubinらが独立に最良定数を求めて以来、ほとんど未解決であった。

過去数年間の研究で、申請者らは数理物理学・工学の分野に登場する各種微分方程式の境界値問題に対するグリーン関数を求め、その正值性や階層構造など解析的あるいは代数的性質を丁寧に調べてきた。その結果、申請者らはグリーン関数があるヒルベルト空間の再生核であることを見出した。この事実に基づいて、本研究は再生核理論の視点から見たグリーン関数の解析的あるいは代数的構造を明らかにし、再生核を利用したソボレフ不等式の最良評価、特に最良定数計算、並びにソボレフ不等式の離散化とそれらの応用を中心に研究を進めることが研究開始当初の背景であった。

2. 研究の目的

(1) グリーン関数の解析的・代数的構造解析: 数理物理学, 工学の諸分野に登場する高階常微分方程式の各種境界値問題を設定し、グリーン関数を求め、その正值性, 階層構造, 行列式表示, 積分表示など解析的あるいは代数的な構造を明らかにする。境界条件の種類によっては零固有値の存在ゆえにグリーン関数が求まらない場合がある。その場合もある可解条件と直交性条件を付加し対称直行化法と呼ばれる方法でグリーン関数を構成することにより、再生核と対応するグリーン関数を一意に求めることが可能である。

(2) 連続・離散ソボレフ不等式の最良評価: 近年の研究で、グリーン関数はヒルベルト空間を適切に定めると、その再生核となることが分かった。グリーン関数と再生核との対応関係を調べることで、境界値問題と再生核ヒルベルト空間との対応を明らかにする。再生核理論から最良定数はグリーン関数の対角線値の最大値に等しい。これまで蓄積してきたグリーン関数の詳細な情報をもとに、ソボレフ不等式の最良評価(最良定数, 最良関数計算)を求める。並行してソボレフ不等式の離散化を行って、連続・離散版最良評価の統一的手法の糸口を探る。

(3) 解の存在定理の証明への応用: 最近、2M階微分作用素の固定端自由端境界値問題に対応するソボレフ不等式の最良定数を利用して、変数係数微分方程式の解の存在定理についての結論を得た。この結論は従来知られていたリヤプノフ型不等式より良い評価を与える。この結果を起点に、各種微分作用素に対応する変数係数微分方程式の解の存在定理を証明する。

3. 研究の方法

本研究組織は研究代表者の他に、亀高惟倫(大阪大学名誉教授(研究分担者)), 榎田登美男(兵庫県立大学教授(研究分担者)), 永井敦(日本大学教授(連携研究者))の4名から構成する。役割分担を決めた上で各テーマについて独立に研究を進め、電子メールなどを中心に研究連絡を密に取る。また、年に4回のペースで4名が関西に集まり、セミナーを開催、研究報告、議論を行う。研究成果の外部への発信については、積極的な論文・研究発表を行う。研究の効率化を計るため研究組織の各メンバーの専門分野を考慮して、基本的に以下の通り研究の役割分担を決める。

(平成25年度) 武村: 各種境界値問題に対するグリーン関数の性質、特に正值性と対角線値の挙動の解析を行う。並行して、ソボレフ不等式の離散化を行う。亀高: グリーン関数と再生核の関連を究明、ソボレフ不等式の最良評価を行う。榎田: 各種微分作用素のスペクトル構造解析を行う。永井: グリーン関数の離散化、離散ソボレフ不等式の最良評価を行う。

(平成26年度以降) 武村: 最良定数を変数係数常微分方程式の解の存在定理の証明へ応用する。亀高: 重調和作用素に対応するソボレフ不等式と L^p ソボレフ不等式の最良評価を行う。榎田: 多重調和作用素など偏微分方程式の境界値問題に対するグリーン関数の計算と性質究明を行う。永井: 重調和作用素に対応したソボレフ不等式の離散化と最良評価を行う。

4. 研究成果

初年度の2013年には、トムソンケーブルの連続版に対する最良評価をえることができた(雑誌論文⑦)。出力電圧の絶対値の最大値が入力電圧の L^2 ノルムの定数倍で評価される。上記評価の内、定数をもっとも小さい最良定数を求めることができた。最良定数は、抵抗, キャパシタンス, コンダクタンスの各定数を用いて有理関数として表された。

2013年にTokyo J. of Math. (Volume 36, Number 1)に掲載された正多面体上の離散ソボレフ不等式の枠組みを、2014年にメビウスの梯子へと拡張したのが雑誌論文⑤, ⑥である。本結果は、グラフラプラシアンは同様であるが、正多面体(正4面体, 正6面体, 正8面体, 正12面体, 正20面体)から頂点数のみを一般化するのは初めての試みであった。このすぐ後、2015年に、正多面体の延長線上で、頂点数を増やしたC60フラーレンバックボール(雑誌論文③), 切頂正4, 6, 8面体(雑誌論文②)へと拡張を行うことができた。こうした離散ソボレフ不等式の工学的な意味は、各原子の定常状態からの変位の絶対値の2乗の最大値を上からポテンシャルエネルギー(隣接する原子ののびの2乗和)の定数倍で評価する式である。すなわち、最良定数が「小さい」ことは「たわみにくい」、言い

換えると、対象のモデルの「固さ」を表している。この他に、2015年には2M階微分作用素 $(-1)^M(d/dx)^{(2M)}$ に対する自由端条件のソボレフ不等式を導出後、最良評価を得た（雑誌論文④）。これまで2M階微分作用素 $(-1)^M(d/dx)^{(2M)}$ の自己共役境界値問題において、固定端、ディリクレ端、ノイマン端、固定端自由端、周期境界条件と系統的に扱ってきたが、残されていた自由端条件についても結果をまとめることができた。2M階微分作用素に対する自由端境界値問題のグリーン関数は、超幾何級数に関連するホイップルの公式を用いて表現される。また、グリーン関数は可解条件下で対称直交化法を用いて構成された。そのグリーン関数があるヒルベルト空間の再生核であることを利用して、ソボレフ不等式を導出後、最良定数を具体的に $M=1, 2, 3, 4, 5$ のケースで求めた。Mが6以上の場合について、最良定数の予想をしたが、未証明である。

2016年には、メビウスの梯子から重み付きテプリッツグラフ上へ一般化することができた（雑誌論文①）。重み付きテプリッツグラフは、2種類のテプリッツグラフの和という形に分解されることで、分解前のテプリッツグラフに対する連結性のチェックを容易にする。重み付きテプリッツグラフ上の一般化グラフラプラシアン A に対応する2種類の離散ソボレフ不等式が得られた。それぞれの不等式に対する各最良定数はグリーン行列と擬グリーン行列を用いて計算された。2種類いずれの最良定数も A を用いたある行列に対する固有値の調和平均の逆数として表された。

以上の成果は関連の深い学会において、定期的に研究発表（学会発表①-⑤）を行った。研究成果物としては、関連の深い国内外のジャーナルに投稿して、本研究の意義を社会に発信した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計7件）

- ① Kazuo Takemura, Atsushi Nagai, Yoshinori Kametaka, Two types of discrete Sobolev inequalities on a weighted Toeplitz graph, *Linear Algebra and its Applications*, 査読有, 507/2016, 344-355.
DOI:10.1016/j.laa.2016.06.029
- ② 亀高惟倫, 山岸弘幸, 永井敦, 渡辺宏太郎, 武村一雄, 切頂正4, 6, 8面体上の離散ソボレフ不等式の最良定数, *日本応用数学会論文誌*, 査読有, 25/3, 2015, 135-150.

- ③ Yoshinori Kametaka, Atsushi Nagai, Hiroyuki Yamagishi, Kazuo Takemura and Kohtaro Watanabe, The Best Constant of Discrete Sobolev Inequality on the C60 Fullerene Buckyball, *Journal of the Physical Society of Japan*, 査読有, 84/074004, 2015.
DOI:10.7566/JPSJ.84.074004
- ④ K. Takemura, A. Nagai, Y. Kametaka, K. Watanabe and H. Yamagishi, Sobolev inequality of free boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{(2M)}$, *Journal of Inequalities and Applications*, 査読有, 2015:54.
DOI:10.1186/s13660-015-0568-9
- ⑤ 武村一雄, メビウスの梯子上の離散ソボレフ不等式の最良定数, *日本大学生産工学部研究報告A(理工系)*, 査読有, 47/1, 11-16, 2014.
- ⑥ K. Takemura, The Best Constants of Discrete Sobolev Inequalities on Mobius Ladder, *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 査読有, 86/2, 233-248, 2014.
- ⑦ H. Yamagishi, Y. Kametaka, A. Nagai, K. Watanabe and K. Takemura, The best estimation corresponding to continuous model of Thomson cable, *JSIAM Letters*, 査読有, 5, 53-56, 2013.

〔学会発表〕（計5件）

- ① 山岸弘幸, 亀高惟倫, 2重結合を含む正多面体上の離散ソボレフ不等式の最良定数, *日本数学会*, 2016年3月16日, 筑波大学(茨城県・つくば市)。
- ② 武村一雄, 重み付きテプリッツグラフ上の離散ソボレフ不等式, 平成27年度(第59回)日本大学理工学部学術講演会, 2015年12月5日, 日本大学(東京都・千代田区)。

- ③ 亀高惟倫, 永井敦, 山岸弘幸, 武村一雄,
渡辺宏太郎, 13 種 C60 フラーレンと離
散ソボレフ不等式の最良定数, 日本応用
数理学会, 2015 年 9 月 10 日, 金沢大学
(石川県・金沢市) .
- ④ 山岸弘幸, 亀高惟倫, 永井敦, 棒のたわ
みの周期境界値問題とソボレフ不等式
の最良定数, 日本数学会, 2015 年 9 月
13 日, 京都産業大学(京都府・京都市) .
- ⑤ 武村一雄, 重み付き d-有限正則グラフ
上の離散ソボレフ不等式の最良定数, 日
本数学会, 2014 年 3 月 15 日, 学習院大
学(東京都・豊島区) .

6. 研究組織

(1) 研究代表者

武村 一雄 (TAKEMURA, Kazuo)
日本大学・理工学部・准教授
研究者番号: 6 0 3 6 7 2 1 6

(2) 研究分担者

亀高 惟倫 (KAMETAKA, Yoshinori)
大阪大学・基礎工学研究科・名誉教授
研究者番号: 0 0 0 4 7 2 1 8

榎田 登美男 (UMEDA, Tomio)
兵庫県立大学・物質理学研究科・教授
研究者番号: 2 0 1 6 0 3 1 9

(3) 連携研究者

永井 敦 (NAGAI, Atsushi)
日本大学・生産工学部・教授
研究者番号: 9 0 3 0 4 0 3 9