

平成 30 年 6 月 4 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400260

研究課題名(和文) 格子理論に特徴的なライブニッツ則の表現と格子上での超対称性理論の構築

研究課題名(英文) Realization of lattice Leibniz rule and construction of supersymmetry on lattice

研究代表者

宗 博人 (So, Hiroto)

愛媛大学・理工学研究科(理学系)・教授

研究者番号：20196992

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：巡回ライブニッツ則という格子理論に特徴的なライブニッツ則を使って、格子上の場の新しいタイプの積を提案した。その積を使って、 $N=2$ と $N=4$ の格子上の超対称量子力学を構成した。前者は実スカラータイプで、位相幾何学量であるWitten 指数を localization technique を使って計算した。また、複素モデルでは、連続理論のF項の非繰り込み定理に対応するものを有限の格子定数のまま証明した。

研究成果の概要(英文)：We propose a new type field product based on cyclic Leibniz rule which is characteristic in lattice theory. Using the product, we formulated real and complex supersymmetric quantum mechanics on lattice. Still in the real model the Witten index has been calculated by localization technique. For complex model, We have prove a non-renormalization theorem on a kind of F-term keeping finite lattice constant.

研究分野：素粒子論

キーワード：超対称性 場の理論 格子場の理論 量子力学

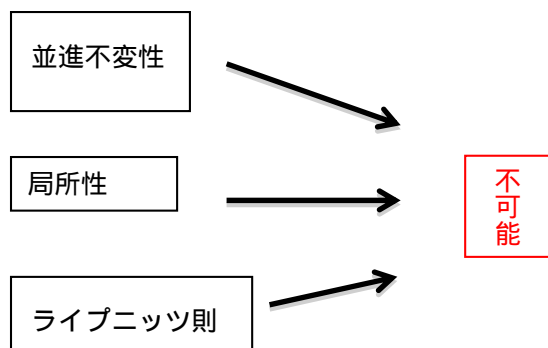
1. 研究開始当初の背景

この研究開始時での背景として、素粒子の統一理論の有望なアイデアである超対称性を非摂動的に計算できる格子理論として完成させる事が極めて難しいと思われた。

その事は素粒子論や場の理論の学界では経験的なものであったが、前回の科研費基盤(C)(研究課題「過自由度による格子超対称性の実現」、研究課題番号 20540274、研究代表者 宗 博人)の研究成果である「格子上ではライプニッツ則が成立し得ない」と言う no-go 定理が我々によって証明され、その困難さは確実なものとなった。つまり、相互作用する系のフルな超対称性を格子上で構成するのは不可能である。これは俗に言う「格子理論は有限格子間隔を持つので、無限小並進を含む超ポアンカレ代数を構成できない」というのは、厳密には間違いである。その証拠に自由場の理論を無限小並進のない有限格子定数の格子上で構成する事は可能である。

問題は、無限並進可能な理論の性質の中のライプニッツ則の成立が、格子上の超対称性には重要だったのである。正確な三つの仮定も含めて、図で説明する。

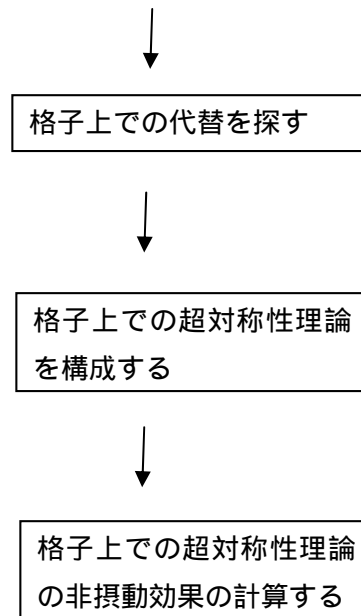
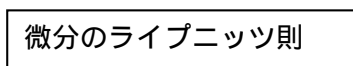
図1 格子上の並進不変性、局所性、ライプニッツ則の非整合性 (no-go 定理)



2. 研究の目的

1.(研究開始当初の背景)で述べたように、格子上のライプニッツ則には本質的な困難があるので、その抜道(loophole)はないかを調べる。つまり「ライプニッツ則」に変わる格子上の場の積で成立する数学的なものは無いのかを探す。この下線部は後に巡回ライプニッツ則(CLR)と呼ばれる事になる。これは今まで見たことのない新しいタイプの格子理論を探す事にもなると期待される。その結果として、格子上で超対称性理論を構成する。その性質を調べる。そしてさらに、格子理論で特徴的な非摂動効果を調べる。

図2 ライプニッツ則とその格子上の代替



3. 研究の方法

(1) 超対称性におけるライプニッツ則の必然性(必要性)を明らかにする。初年度は、フルの超ポアンカレ対称性が引き起こす結論であるライプニッツ則を確認する。さらにその結果、ライプニッツ則の代替(CLR)を見つけ、それを使って超対称性の部分対称性(後に冪零超対称性と分かる。)を格子上で実現することを試みる。

図3 ライプニッツ則、超対称性と巡回ライプニッツ則(CLR)、冪零超対称性の関係



(2) 具体的に1次元の場合の実超対称(N=2)量子力学および複素超対称(N=4)量子力学を巡回ライプニッツ則(CLR)を使って構成する。さらに2次元版巡回ライプニッツ則(CLR)の方法を見つけ出し、2次元 Wess-Zumino 模型を構成する。

(3) 構成された超対称模型の性質を調べる。

4. 研究成果

(1) [雑誌論文]

巡回ライプニッツ則(CLR)の発見

この研究の最大の成果である巡回ライプニッツ則の発見があった。当初、ライプニッツ則は、数学において微分の基本的な性質であり、例え格子上であっても変更はできないと

思われた。従って、1. で述べたように no-go 定理の罫に入り込んでしまうが、そこで、この事を少し詳しく説明したい。通常のリブニッツ則は関数の積の微分が関数の微分と関数の積の線型結合になることであるが、格子上で微分を差分に置き換えたときには、no-go 定理からこれは不可能であることが分かっている。しかし、これが関数の性質ではなく、関数同士の内積(積分)として成立する関係であればどうか。当然、関数の関係(ライブニッツ則)があればこの内積として成立するが、逆は必ずしも成立しない。つまり、ライブニッツ則よりも少し弱い関係なのである。これならば、no-go 定理の罫(図1)を逃れている可能性がある。実際に、格子上でこの弱い関係のある場の積を定義することに成功した。これは、〔雑誌論文〕で最初に発表された。また、この関係式は格子場の積の規則の一般化に豊富な示唆を与えている。

#### N=2 SUSYQM の構成

巡回ライブニッツ則(CLR)を用いて、実際に超対称性を格子上で実現できることを最初に、N=2 の実超対称量子力学(N=2 SUSYQM)で示した。但し、この場合には、理論が持つ超対称性の数(2個)の半分(1個)しか格子上では厳密には成立しない。この保存する1個の超電荷は当然、冪零超電荷(2乗すると零)である。

#### 局在化技術を使った Witten 指数の計算

で構成された理論で計算可能な物理量は色々あるが、代表的なものに Witten 指数がある。この指数は位相幾何学的な量で基底状態の性質を反映するものである。従来の定式化と違い CLR を使った で構成された理論では運動項と相互作用項で独立に冪零超電荷が保存されるので、超対称性理論でおなじみの局在化の技術を適用することができる。その結果、格子フェルミオンのダブリング現象を回避するために導入した Wilson 係数の大きさによらずに正確にこの指数を計算でき、連続理論の結果を再現した。これは CLR を使用した格子上の超対称性を連続の超対称性により近いアプローチであることが予想される。

#### (2)〔雑誌論文〕

#### N=4 SUSYQM の構成

巡回ライブニッツ則(CLR)を用いて N=4 の複素超対称量子力学(N=4 SUSYQM)を格子上で構成した。但し、この場合には、理論が持つ超対称性の数(4個)の半分(2個)しか格子上では厳密には成立しない。この保存する2個の超電荷は冪零超電荷(2乗すると零)で互いに反可換である。この結果は〔雑誌論文〕で発表された。

#### コホモロジー

巡回ライブニッツ則(CLR)と冪零超対称性

は数学で言うコホモロジー - の解析と親和性が高いことが分かった。格子理論の任意の場の組み合わせの形を二種類に分類可能であることが分かった。この解析には、no-go 定理の仮定にも出てきた局所性が重要である。

#### 非線り込み定理(非補正定理)

で二種類の場の組み合わせのカテゴリリーのうちのの一つは、驚くべきことに量子補正を受けないことが分かった。これが格子間隔が有限なままで示された。この証明には、格子上で厳密に保存される二つの冪零超電荷の存在、 のコホモロジーの解析と Seiberg 流の量子数を用いた場の組み合わせの展開が重要である。もちろん、連続理論でも、Wess-Zumino 模型の F 項非線り込み定理はあるが、我々の CLR を用いた定理は、連続で言う有限カットオフでの証明なので、連続理論でも難しい。

#### (3) 研究における困難さと展望と学界への影響

#### 高次元での困難さ

一次元の理論ではうまく格子上に冪零超対称性を実現できたので、高次元理論に向かうのが自然である。冪零超対称性と関連する二次元の CLR に対応する関係式を見つけることはできたが、格子上で局所的な差分と場の積としては実現できなかった。これが、当初の計画からは予想外のことであり、時間がかかってしまった。この事実は、多変数解析関数の特有な性質という、物理学ではあまりお目にかからなかった理論の性質のためであったので、すぐには正確に認識できなかった。しかし、思いがけない物理学と数学の関係にはまた相互の新しい発展が予想される。

#### 学界への影響 新しい格子理論と数値

#### 解析

巡回ライブニッツ則(CLR)を用いた格子超対称量子力学の数値解析はすでに研究者の組み合わせを変えて始まっている。また、海外の研究者からも、非線り込み定理など注目されている。また、超対称性を離れて、フェルミオンのないボソニックな場のみの新しいタイプの格子理論も考えられ、新しい物質の性質の解明に使える可能性がある。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 3件)

Mitsuhiro Kato, Makoto Sakamoto,

Hiroto So, Non-renormalization theorem in a lattice supersymmetric theory and the cyclic Leibniz rule, Progress of Theoretical and Experimental Physics, 査

読有、Vol.2017,No.4、2017年、P043B09

DOI: 10.1093/ptep/ptx045 .

② Mitsuhiro Kato, Makoto Sakamoto, Hiroto So, Non-renormalization theorem and cyclic Leibniz rule in lattice supersymmetry, Proceedings of Science LATTICE2012, 査読有、Vol. Lattice2014, 2014年、P274.  
DOI: 10.22323/1.214.0274 .

Mitsuhiro Kato, Makoto Sakamoto, Hiroto So, A criterion for lattice supersymmetry: cyclic Leibniz rule, Journal of High Energy Physics, 査読有、Vol.1305、No.5、2013年、P089.  
DOI:10.1007/JHEP05(2013)089 .

[学会発表](計 3件)

① Makoto Sakamoto, Cyclic Leibniz rule, cohomology and non-renormalization theorem in lattice supersymmetry, The 24th International Conference on Supersymmetry and Unification of Fundamental Interactions (SUSY 2016), Melbourne, Australia, July 7, 2016.

宗 博人, Cohomological property of CLR-realized supersymmetric quantum mechanics on lattice, 71回日本物理学会年次大会、仙台市、日本、2016年3月22日発表。

③ Makoto Sakamoto, Non-renormalization theorem and cyclic Leibniz rule in lattice supersymmetry, The 32nd International Symposium on Lattice Field Theory (LATTICE2014), New York, USA, June 27, 2014.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

宗 博人 (SO, Hiroto)

愛媛大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 20196992

### (2) 研究分担者

坂本 真人 (SAKAMOTO, Makoto)

神戸大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 30183817

加藤 光裕 (KATO, Mitsuhiro)

東京大学・大学院総合文化研究科・教授  
研究者番号: 80185876